БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра информационно-вычислительных систем

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие
для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени и переподготовки руководящих работников и специалистов

В трех частях

Часть 2

Гомель 2021

УДК 330.42
ББК 65в631
Э 40

Авторы-составители: Л. П. Авдашкова, канд. физ.-мат. наук, доцент;
М. А. Грибовская, канд. физ.-мат. наук, доцент;
О. И. Еськова, канд. техн. наук, доцент;
Т. А. Заяц, ст. преподаватель

Рецензенты: И. И. Луханин, канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой иностранных языков и межкультурных коммуникаций Гомельского филиала Международного университета «МИТСО»;
Л. А. Воробей, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ИВС Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 4 от 14 апреля 2020 г.

Э 40 **Эконометрика** и экономико-математические методы и модели : пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени и переподготовки руководящих работников и специалистов. В 3 ч. Ч. 2 / авт.-сост.: Л. П. Авдашкова, М. А. Грибовская, О. И. Еськова, Т. А. Заяц. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2021. – 100 с.
ISBN 978-985-540-552-9

Предназначено для аудиторной и самостоятельной работы студентов экономических специальностей и слушателей системы переподготовки руководящих работников и специалистов.

УДК 330.42
ББК 65в631

ISBN 978-985-540-571-0 (ч. 2)
ISBN 978-985-540-552-9

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Необходимость интенсивного развития экономики и коренной ее перестройки требует от специалистов по управлению овладения методами научного анализа экономических процессов и умения использовать для этой цели вычислительную технику. В курсе «Экономико-математические методы и модели» рассматриваются принципы математического моделирования, являющегося наиболее эффективным методом анализа социально-экономических проблем и процессов. Этот курс позволяет объединить знания из различных областей математики, экономики и информатики и применить их для решения конкретных экономических задач.

Важным разделом курса «Экономико-математические методы и модели» является линейное программирование. Настоящее пособие посвящено изучению данного раздела. Оно включает необходимые теоретические сведения по различным разделам линейного программирования, примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы студентов. Все лабораторные работы, представленные во втором разделе, сопровождаются вопросами для самоконтроля.

Пособие состоит из трех разделов. В первом из них осуществляется постановка задачи линейного программирования, приводятся основные определения и пример формализации экономической задачи, рассматриваются методы решения различных задач линейного программирования. Для задачи производственного планирования проводится анализ решения на чувствительность к изменению параметров модели, анализ устойчивости оптимального плана.

Второй раздел посвящен моделированию межотраслевого баланса, использованию модели МОБ для планирования выпуска продукции.

В третьем разделе рассматриваются различные виды систем массового обслуживания, рассчитываются показатели эффективности их работы и качества обслуживания.

Раздел I. МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Тема 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ MS EXCEL

1.1. Основные теоретические сведения

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т. е. равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

Для практического решения экономической задачи математическими методами ее прежде всего следует записать с помощью математических выражений (уравнений и неравенств), т. е. составить экономико-математическую модель. Можно наметить следующую общую схему формирования модели:

- выбор некоторого числа переменных величин, заданием числовых значений которых однозначно определяется одно из возможных состояний исследуемого явления;
- выражение взаимосвязей, присущих исследуемому явлению, в виде математических соотношений (уравнений и неравенств), которые образуют систему ограничений задачи;
- количественное выражение выбранного критерия оптимальности в форме целевой функции;
- математическая формулировка задачи как задачи отыскания экстремума целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные.

Для иллюстрации приведенной схемы рассмотрим пример.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1. Имеется три вида продуктов питания: A_1, A_2, A_3. Известна стоимость единицы каждого продукта: 10, 5 и 12 усл. ед. Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать белков не менее 200 единиц, жиров не менее 150 единиц, углеводов не менее 560 единиц.

Содержание элементов в единице каждого продукта задано таблице 1.

Таблица 1 – **Исходные данные для составления рациона, усл. ед.**

Продукты	Содержание питательных веществ в единице продукта			Стоимость единицы продукта
	белки	жиры	углеводы	
A_1	5	7	8	10
A_2	4	1	2	5
A_3	9	3	6	12
Требование к рациону	200	150	560	–

Таким образом, единица продукта A_1 содержит 5 единиц белков, 7 единиц жиров, 8 единиц углеводов и т. д.

Требуется так составить пищевой рацион, чтобы обеспечить заданное содержание компонентов при минимальной стоимости рациона.

Решение

Обозначим через x_1, x_2, x_3 соответственно количество продуктов A_1, A_2 и A_3, входящих в рацион. Общая стоимость рациона при этом будет рассчитываться следующим образом:

$$F = 10x_1 + 5x_2 + 12x_3. \tag{1}$$

По условию задачи требуется, чтобы эта стоимость была минимальной, т. е. $F \to min$.

Общее количество белков, содержащееся в рационе, не должно быть меньше 200. Это требование можно выразить неравенством

$$5x_1 + 4x_2 + 9x_3 \geq 200. \tag{2}$$

Аналогично записываются ограничения для жиров:

$$7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 150. \tag{3}$$

Для углеводов ограничения выражаются следующим неравенством:

$$8x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 560. \tag{4}$$

Количество продуктов не может быть отрицательной величиной, поэтому зададим также условия:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \tag{5}$$

Таким образом, математическая модель задачи формулируется следующим образом: найти такие значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих линейным ограничениям (2)–(5), при которых линейная функция (1) обращалась бы в минимум.

В общем виде математическая формулировка задачи линейного программирования (ЗЛП) следующая: найти значения переменных x_i ($i = 1, ..., n$), при которых достигается максимум (минимум) целевой функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow max\ (min) \quad (6)$$

и выполняются ограничения:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n\ \{\leq, =, \geq\}\ b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n\ \{\leq, =, \geq\}\ b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n\ \{\leq, =, \geq\}\ b_m; \\ x_j \geq 0,\ (i = 1, \dots, n), \end{array}\right\} \quad (7)$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины;
m – число уравнений;
n – число переменных.

Запись $\{\leq, =, \geq\}$ в ограничениях (7) означает, что возможен один из знаков ($\leq$, = или $\geq$).

Решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором выполняются все ограничения, называется допустимым. Допустимое решение, при котором функция F принимает оптимальное значение (максимум или минимум), называется оптимальным. ЗЛП решается симплексным методом, который реализован в надстройке *Поиск решения* пакета MS Excel.

Надстройка *Поиск решения* пакета MS Excel предназначена для выполнения сложных вычислений, которые трудно произвести вручную. Она позволяет находить значения в целевой ячейке, изменяя при этом до 200 переменных, удовлетворяющих заданным критериям. По желанию пользователя результаты поиска могут быть представлены в виде отчетов разных типов, которые можно поместить в рабочую книгу.

Перед тем как начать поиск решения, необходимо произвести формализацию задачи, т. е. составить ее экономико-математическую модель.

Исходные данные для запуска надстройки *Поиск решения* должны быть представлены в виде таблицы, которая содержит формулы, отражающие зависимости между данными таблицы.

Рассмотрим работу надстройки *Поиск решения* на примере.

Задача 2. При продаже товаров *A* и *B* торговое предприятие использует четыре вида ресурсов. Нормы затрат ресурсов на реализацию одной единицы товара и объемы ресурсов указаны в таблице 2. Доход от реализации единицы товара *A* составляет 2 усл. ед., товара *B* – 3 усл. ед. Определим оптимальный план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию наибольшую прибыль.

Таблица 2 – **Нормы затрат и объем ресурсов, усл. ед.**

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на реализацию одной единицы товара		Количество ресурсов на предприятии
	A	B	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Решение

1. Составим математическую модель задачи. Количество товара *A* обозначим x_1, *B* – x_2. Доход от реализации товара *A* составляет $2x_1$ усл. ед., товара *B* – $3x_2$ усл. ед., общий доход – соответственно

$$F = 2x_1 + 3x_2.$$

Поскольку торговому предприятию нужно получить наибольшую прибыль, то ставится задача максимизации целевой функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max.$$

Ресурс 1-го вида ограничен 12 единицами, при этом его расходуется на реализацию товара *A* $2x_1$ единиц, а на реализацию товара *B* – $2x_2$ единиц. Поскольку количество израсходованного ресурса не должно превышать его запаса на предприятии, можно записать следующее ограничение:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12.$$

Аналогично записываются ограничения для других ресурсов:

$$x_1 + 2x_2 \le 8;$$

$$4x_1 \le 16;$$

$$4x_2 \le 12.$$

Так как количество реализованного товара не может быть величиной отрицательной, то добавим еще ограничения $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$. Таким образом, математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$2x_1 + 3x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1 + 2x_2 \le 8; \\ 4x_1 \le 16; \\ 4x_2 \le 12; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Заполним ячейки Excel соответствующими значениями (рисунок 1).

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3	Значения переменных			
4	0	0		
5	Ограничения			
6	Коэффициенты		Левая часть	Правая часть
7	2	2	0	12
8	1	2	0	8
9	4	0	0	16
10	0	4	0	12
11	Коэффициенты целевой функции			
12	2	3		
13	Значение целевой функции			
14	0			

Рисунок 1 – **Форма в Excel для решения задачи линейного программирования**

Ячейки A4:B4 отведены под значения переменных x_1 и x_2. Этим ячейкам присваиваются начальные значения (0; 0). После решения задачи Excel запишет в эти ячейки найденные оптимальные значения переменных x_1 и x_2. Поэтому эти ячейки называются изменяемыми.

Далее нужно подготовить данные для задания ограничений задачи. В ячейки диапазона A7:B10 внесем коэффициенты при неизвестных в ограничениях. Вычислим значение левой части первого ограничения при начальных значениях переменных. Для этого введем в ячейку C7 формулу

=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A7:B7).

Ячейки C8:C10 заполняются формулами аналогично. Формулу ячейки C7 можно скопировать с помощью автозаполнения. Таким образом, ячейки C7:C10 содержат значения фактически использованных ресурсов (левые части ограничений). В ячейки D7:D10 внесем количество ресурса, имеющегося в наличии (правые части ограничений).

Вычислим значение целевой функции при начальных значениях. В ячейку A14 запишем формулу вычисления общего дохода

=СУММПРОИЗВ(A4:B4;A12:B12).

Ячейка, содержащая формулу вычисления значения целевой функции модели, называется целевой.

Форма на листе Excel в режиме представления формул показана на рисунок 8.

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3	Значения переменных			
4	0	0		
5	Ограничения			
6	Коэффициенты		Левая часть	Правая часть
7	2	2	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A7:B7)	12
8	1	2	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A8:B8)	8
9	4	0	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A9:B9)	16
10	0	4	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A10:B10)	12
11	Коэффициенты целевой функции			
12	2	3		
13	Значение целевой функции			
14	=СУММПРОИЗВ(A4:B4;A12:B12)			

Рисунок 2 – **Форма на листе Excel в режиме представления формул**

3. Чтобы начать процесс поиска решения, выполним команду *Данные* / *Поиск решения*. На экране появится окно *Поиск решения*.

Замечание. Если такой команды на вкладке *Данные* (*справа*) не имеется, следует загрузить соответствующую программу-надстройку. Для этого выполним команду *Файл* / *Параметры* / *Надстройки*. В открывшемся окне Управление надстройками нужно выделить строку Поиск решения, нажать кнопку *Перейти* и установить флажок в строке *Поиск решения*. Нажать *ОК* (рисунок 3).

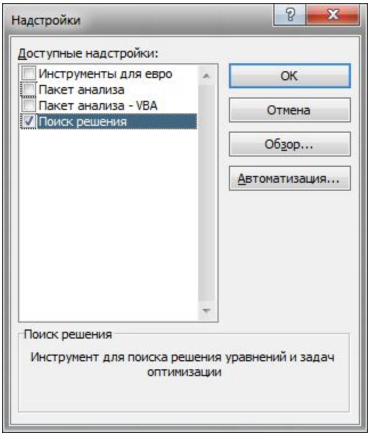


Рисунок 3 – **Окно *Надстройки***

4. Установим курсор в поле *Оптимизировать целевую функцию* и укажем ячейку модели, значение которой должно быть изменено (максимизировано, минимизировано или приравнено к какому-либо определенному указанному значению). В нашей модели целевой будет ячейка, содержащая формулу расчета прибыли A14 (рисунок 4).

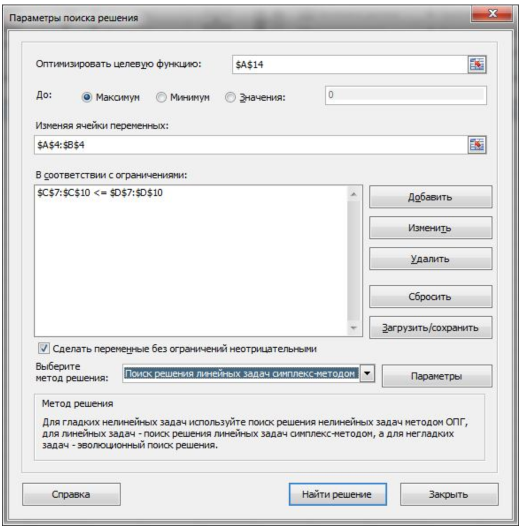


Рисунок 4 – **Окно *Поиск решения***

Целевая ячейка должна содержать формулу, которая прямо или косвенно ссылается на изменяемые ячейки.

5. С помощью переключателя *До*, который может находиться в трех положениях, зададим максимизацию целевой ячейки, т. е. установим переключатель в положение *Максимум*.

6. В поле *Изменяя ячейки переменных* установим ссылки на ячейки, которые будут изменяться, т. е. укажем ячейки с значениями переменных (план задачи). Сделать это можно выделив мышью диапазон переменных.

Введем адрес диапазона A4:B4 (рисунок 4).

7. Следующий этап – определение ограничений. Для этого в блоке *В соответствии с ограничениями*: нажмем кнопку *Добавить*. На экране появится окно диалога *Добавление ограничения* (рисунки 5, 6).

В поле *Ссылка на ячейки* указывается адрес ячейки или диапазона ячеек, для которых должно действовать ограничение (левая часть ограничения). В списке операторов нужно выбрать оператор. В поле *Ограничение* указывается число или делается ссылка на какую-либо ячейку или диапазон (правая часть ограничения).

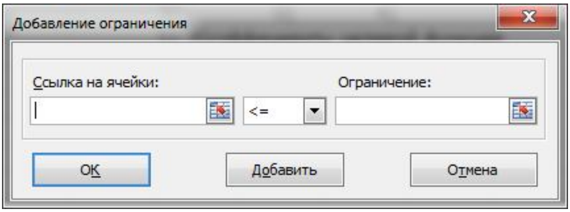


Рисунок 5 – **Окно *Добавление ограничения***

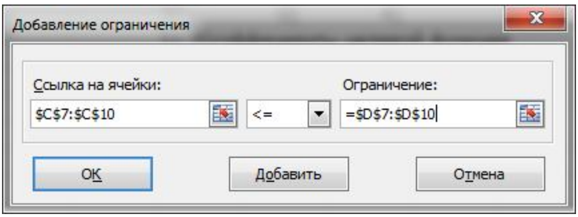


Рисунок 6 – **Окно *Добавление ограничения***

Ограничения можно задать как для изменяемых ячеек, так и для целевой ячейки, а также для других ячеек, прямо или косвенно присутствующих в модели.

Если в поле *Ограничение* указана ссылка на диапазон ячеек, размер этого диапазона должен совпадать с размером диапазона, указанного в поле *Ссылка на ячейку*.

Так как все 4 ограничения имеют один и тот же знак (≤)(все левые части ограничений меньше или равны всех правых частей этих ограничений), то можно ввести их одной записью:

$C$7:$C$10<=$D$7:$D$10.

Далее нажмем кнопку *ОК*, чтобы завершить ввод ограничений и вернуться в окно *Поиск решения*. Заданные условия появятся в списке *В соответствии с ограничениями*.

С помощью кнопок *Добавить* и *Изменить* можно при необходимости откорректировать заданные ограничения.

Флажок в поле *Сделать переменные без ограничений неотрицательными* обеспечит выполнение условий неотрицательности переменных.

В списке *Выберите метод решения* нужно указать *Поиск решения линейных задач симплекс-методом,* так как решаемая задача линейная.

Итак, целевая ячейка, изменяемые ячейки и ограничения для нашей модели заданы (см. рисунок 4).

После того, как все параметры и ограничения будут заданы, нужно только инициировать поиск.

9. Нажмем кнопку *Выполнить* в окне диалога *Поиск решения*. По мере того, как идет поиск, отдельные его шаги будут отображаться в строке состояния. Когда поиск закончится, в таблицу будут внесены новые значения, и на экране появится окно, сообщающее о завершении операции (рисунок 7).

Поскольку полученные значения нас устраивают, установим безымянный переключатель в положение *Сохранить найденное решение*, тогда таблица будет обновлена. Отменить результаты поиска можно, установив переключатель в положение *Восстановить исходныезначения*.

В случае, если поиск закончился удачно, можно указать, какие отчеты следует вставить в рабочую книгу. Для этого в списке *Тип отчета* выделяется название нужного типа отчета (или несколько названий с помощью клавиши Ctrl). Оно будет вставлено на отдельном листе в рабочую книгу перед листом с исходными данными.

Когда решение найти невозможно, Exce1 выводит соответствующее сообщение в окне диалога *Результаты поиска решения*. В этом случае возможность создать отчет отсутствует, так как список *Тип отчета* становится недоступным.

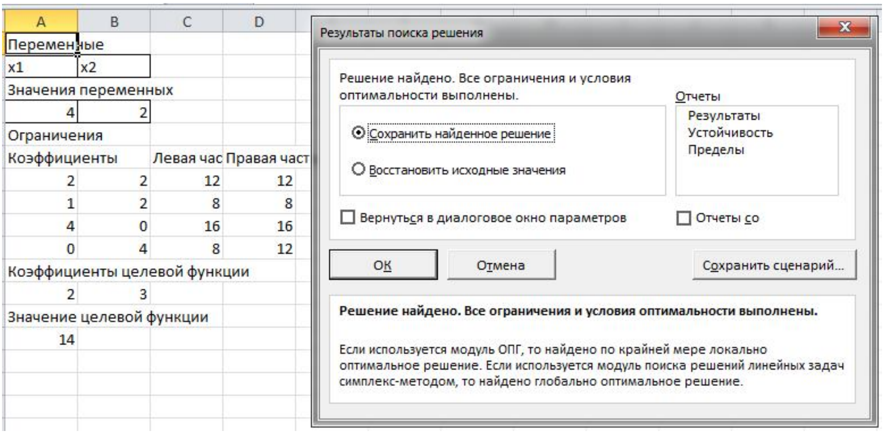


Рисунок 7 – **Результаты решения**

Если планируется использовать созданную модель в дальнейшем, найденное решение можно сохранить как сценарий, нажав кнопку *Сохранить сценарий* в окне диалога *Результаты поиска решения*.

Итак, нами получено следующее решение задачи: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $F_{max} = 14$. Таким образом, следует реализовывать по 4 единицы товара *A* и 2 – товара *B*. При этом общая прибыль будет наибольшей и составит 14 усл. ед. Левые части ограничений представляют собой количество ресурсов, которые будут израсходованы при данном плане реализации товаров, а правые части – количество имеющихся в наличии ресурсов. Поэтому можно сделать вывод о том, какие ресурсы будут израсходованы полностью (левая часть равна правой), а каких ресурсов имеется остаток. Очевидно, что в данной задаче имеется остаток только 4-го ресурса, составляющий 12 – 8 = 4 усл. ед.

1.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Цех выпускает изделия двух видов: валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 3 ч, одной втулки – 2 ч. От реализации вала предприятие получает прибыль 80 к., а от реализации втулки – 60 к. Цех должен произвести не менее 100 шт. валов и не менее 200 шт. втулок. Определите, сколько валов и втулок должен выпустить цех, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если фонд рабочего времени производственных рабочих составляет 900 чел.-ч.

Ответ: (100, 300).

Вариант 2. Предприятие выпускает 3 вида изделий. Месячная программа производства составляет 2 000 изделий 1-го вида, 1 800 изделий 2-го вида и 1 500 изделий 3-го вида. Для выпуска изделий используются материалы, месячный расход которых не может превысить 61 000 кг. В расчете на одно изделие 1-го вида расходуется 8 кг материала, 2-го вида – 10, 3-го вида – 11 кг. Оптовая цена одного изделия 1-го вида – 7 р., 2-го и 3-го – соответственно 10 и 9 р. Определите оптимальный план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию максимум выручки.

Ответ: (2 000, 2 850, 1 500).

Вариант 3. Для изготовления обуви четырех моделей на фабрике используются два сорта кожи. Затраты труда и материалов для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации одной единицы продукции указаны в таблице 3. Составьте план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

Таблица 3 – **Информация о нормах затрат и запасах ресурсов**

Ресурсы	Запас ресурса	Норма затрат ресурсов на производство 1 пары обуви по моделям			
		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Рабочее время, чел.-ч	1 000	1	2	2	12
Кожа 1 сорта, дм^2	500	2	1	0	20
Кожа 2 сорта, дм^2	1 200	0	1	4	10
Прибыль, усл. ед.	–	2	40	10	15

Ответ: (0, 500, 0, 0).

Вариант 4. В суточный рацион включаются два продукта питания: $П_1$и $П_2$, причем продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 единиц. Стоимость одной единицы продукта $П_1$составляет 0,2 к., продукта $П_2$ – 0,4 к. Определите оптимальный рацион, стоимость которого будет наименьшей (таблица 4).

Таблица 4 – **Данные о содержании питательных веществ в продуктах и о нормах потребления**

Питательные вещества	Минимальная норма потребления, ед.	Содержание питательного вещества в одной единице продукта, усл. ед.	
		$П_1$	$П_2$
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

Ответ: (200, 400).

Вариант 5. Обработка деталей *A* и *B* может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль при реализации детали *A* составляет 10 р., детали *B* – 16 р. Исходные данные для решения задачи представлены в таблице 5.

Таблица 5 – **Сведения о нормах времени на обработку детали и о времени работы на станке, ч**

Станки	Норма времени на обработку детали		Время работы станка
	A	*B*	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Определите производственную программу, обеспечивающую максимальную прибыль при условии, что деталей *A* нужно произвести не менее 300 единиц, а деталей *B* – не более 200 единиц.

Ответ: (400, 200).

Вариант 6. Торговое предприятие для продажи товаров трех видов использует следующие ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида указаны в таблице 6. Прибыль, получаемая от реализации одной партии товаров 1-го вида, составляет 5 усл. ед.; 2-го – 8; 3-го – 6 усл. ед. Определите оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

Таблица 6 – **Информация о затратах ресурсов на продажу 1 партии товаров**

Ресурсы	Вид товара			Объем ресурсов
	№ 1	№ 2	№ 3	
Время, чел.-ч	0,5	0,7	0,6	370
Площадь, м^2	0,1	0,3	0,2	90

Ответ: (600, 100, 0).

Вариант 7. Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск составляет 90 единиц 1-го изделия, 70 – 2-го и 60 единиц 3-го изделия. Суточные ресурсы включают 780 единиц производственного оборудования (станки, машины), 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в таблице 7. Стоимость 1-го изделия – 8 усл. ед.; 2-го – 7; 3-го изделия – 6 усл. ед. Укажите, сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной.

Таблица 7 – **Информация о расходе ресурсов на каждое изделие, единиц**

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	№ 1	№ 2	№ 3
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Ответ: (112,5; 70; 86,25).

Вариант 8. Для производства столов и стульев имеются ресурсы трех видов: доски 1-го типа (500 м), 2-го (290 м), трудовые ресурсы (440 чел.-ч). От реализации одного стола организация получает прибыль в размере 12 р., стула – 5 р. Затраты ресурсов на одну единицу изделия указаны в таблице 8.

Таблица 8 – **Данные о расходе ресурсов на производство единицы изделия**

Ресурсы	Стол	Стул
Доски 1-го типа, погонных м	5	1
Доски 2-го типа, погонных м	2	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2

Составьте план выпуска продукции при максимизации прибыли.
Ответ: (80,100).

Контрольные вопросы

1. Что значит формализовать экономическую задачу? Каковы основные компоненты математической модели задачи линейного программирования?

2. В чем назначение надстройки *Поиск решения*?

3. Какие ячейки в Excel называются изменяемыми? Как они связаны с другими ячейками? Какие есть способы задания изменяемых ячеек для средства *Поиск решения*?

4. Что такое целевая ячейка? Как задается задача ее оптимизации?

5. Какие виды ограничений можно задать в окне *Поиск решения*? Поясните технологию ввода ограничений.

6. Перечислите основные параметры надстройки *Поиск решения*, укажите их назначение. Какой параметр необходимо устанавливать для решения задачи линейного программирования?

Тема 2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ. АНАЛИЗ ОТЧЕТОВ

2.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим задачу планирования производства продукции при ограничениях на ресурсы.

Постановка задачи. Для производства продукции n типов требуются ресурсы m видов. Нормы расхода ресурсов на производство одной единицы продукции каждого типа заданы матрицей $\{a_{ij}\}$, где a_{ij} – количество ресурса i-го вида, необходимое для производства одной единицы продукции j-го типа. Известно количество ресурсов (b_i, где $i = 1, ..., m$) каждого вида, которое имеется в наличии у предприятия. Известны также величины прибыли (C_j), которую получит предприятие при реализации одной единицы продукции j-го типа. Требуется найти оптимальный план производства продукции, т. е. количество продукции каждого типа, которое нужно произвести, чтобы получить наибольшую прибыль. Условие задачи можно представить в виде таблицы 9.

Таблица 9 – **Исходные данные к задаче планирования производства продукции**

Ресурсы	Продукция				Наличие ресурсов
	Тип 1	Тип 2	…	Тип n	
Ресурс 1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
Ресурс 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
Ресурс m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибыль	C_1	C_2	…	C_n	–

Обозначим через x_j количество продукции j-го типа, которое планируется выпустить ($j = 1, ..., n$). Тогда математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

Модель задачи:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max \tag{12}$$

при ограничениях на ресурсы:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2;\\
&\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m;\\
&x_j \ge 0,\ (i = 1,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}&\\&\\&(13)\\&\\&(14)\end{aligned}$$

Целевая функция задачи (12) представляет собой общую прибыль от производства всей продукции. Ограничения (13) выражают условие, при котором потребление ресурса i-го вида не должно превышать запаса этого ресурса (b_i). Условия неотрицательности переменных (14) вытекают из смысла переменной x_j: количество продукции не может быть отрицательным.

Канонической называется следующая форма записи ЗЛП:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

и выполняются ограничения:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2;\\
&\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m;\\
&x_j \ge 0,\ (i = 1,\ \ldots,\ n),\ \ y_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m).
\end{aligned}\right\}$$

Чтобы привести к виду равенства ограничение вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,$$

в левую часть неравенства прибавляют дополнительную переменную:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i.$$

Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с коэффициентами, равными 0:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot y_i.$$

Экономический смысл переменных y_i ($i = 1, \ldots, m$) следующий: это остатки ресурсов каждого вида. Если при оптимальном решении какой-либо ресурс будет использован полностью, то ограничение исходной задачи (13) будет выполнено в виде равенства, а $y_i = 0$. Такое ограничение в отчетах Excel называется *привязка*.

Анализ чувствительности ЗЛП – анализ влияния возможных изменений параметров модели на оптимальное решение ЗЛП. Он основан на изучении решения специальной задачи, называемой *двойственной* по отношению к исходной ЗЛП. К любой ЗЛП можно построить двойственную ей задачу, исходя из свойств их взаимосвязи.

Рассмотрим двойственную задачу, связанную с рассматриваемой нами задачей планирования производства продукции (таблица 10).

Таблица 10 – **Двойственная задача**

Исходная задача		Двойственная задача	
$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max$	(12)	$F_Д = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to \min$	(15)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1, \ldots, m)$	(13)	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge C_j \quad (j = 1, \ldots, n)$	(16)
$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$	(14)	$z_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$	(17)

Свойства моделей пары взаимно двойственных задач.

• Если в исходной задаче целевая функция максимизируется, то в двойственной ей – минимизируется, и наоборот.

• Каждому основному ограничению одной задачи соответствует переменная другой. Таким образом, количество ограничений системы одной задачи совпадает с количеством переменных в другой.

• Если целевая функция максимизируется, то основные ограничения являются неравенствами вида $\le$, а если минимизируется, то – неравенствами вида $\ge$.

• Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи.

• Коэффициенты при переменных в системах основных ограничений взаимно двойственных задач описываются матрицами, транспонированными относительно друг друга.

• Если на переменную одной задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее основное ограничение другой задачи имеет вид неравенства, знак которого определяется из пункта 3. Если переменная принимает любое значение, то соответствующее основное ограничение другой задачи имеет вид равенства.

- Если основное ограничение одной задачи имеет вид неравенства, то на соответствующую переменную другой задачи налагается условие неотрицательности. Если основное ограничение – равенство, то соответствующая переменная другой задачи может принимать любое значение.

Приведем к каноническому виду.

$$F_D = b_1 z_1 + b_2 z_2 + ... + b_m z_m \to min \tag{18}$$

при ограничениях на ресурсы:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \ldots + a_{m1}z_m - v_1 = c_1; \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{m2}z_m - v_2 = c_2; \\ \ldots \\ a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \ldots + a_{mn}z_m - v_n = c_n; \\ z_i \geq 0, (i = 1, \ldots, m), \end{array}\right\} \tag{19}$$

$$v_j \geq 0, (j = 1, \ldots, n), \tag{20}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ – предельный продукт ресурса;
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ – показатель невыгодности изделий.

Для получения решения взаимно двойственных задач достаточно решить одну из них.

Связь между планами взаимно двойственных задач устанавливают *теоремы двойственности*.

Критерий оптимальности Канторовича (достаточный признак оптимальности). Если для некоторых допустимых планов x^* и z^* взаимно двойственных задач выполняется равенство $F(x^*) = FD(z^*)$, то x^* и z^* являются оптимальными планами соответствующих задач.

Теорема о существовании оптимальных планов пары двойственных задач. Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существования допустимого плана для каждой из них.

Первая теорема двойственности. Для взаимно двойственных задач линейного программирования имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем значения целевых функций в оптимальных планах совпадают.

2. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи несовместна (т. е. допустимое множество планов пусто).

Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости). Для того, чтобы планы и пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$z_i^* \cdot y_i^* = 0 \quad (i = \overline{1; m}). \tag{21}$$

$$x_j^* \cdot v_j^* = 0 \quad (j = \overline{1; n}). \tag{22}$$

Условия (21), (22) называются условиями дополняющей нежесткости.

Экономический смысл переменных двойственной задачи:

zi – предельный продукт *i*-го ресурса в денежном выражении;

vj – показатель невыгодности продукции *j*-го типа.

Экономический смысл второй теоремы двойственности (условий дополняющей нежесткости) для оптимальных планов взаимно двойственных задач: ***дефицитность ресурсов***.

Рассмотрим условия дополняющей нежесткости

$$z_i^* \cdot y_i^* = 0,\ i = \overline{1; m}.$$

Для двух множителей возможны два случая.

1) Если $y_i^* \neq 0$, то $z_i^* = 0 \ (i = \overline{1; m})$. Экономически это означает, что если остаток ресурса не равен нулю и ресурс избыточен, то в оптимальном плане соответствующая двойственная переменная (предельный продукт ресурса в денежном выражении) z_i равна нулю.

Вывод: при увеличении избыточного ресурса общий доход не изменится (избыточный ресурс станет еще более избыточным).

2) Если $z_i^* > 0$, то $y_i^* = 0,\ i = \overline{1; m}.$ Экономически это означает, что если в оптимальном плане двойственной задачи предельный продукт *i*-го ресурса в денежном выражении z_i^* строго больше нуля, то остаток ресурса равен нулю и ресурс израсходован полностью. Такой ре-

сурс называется дефицитным (с точки зрения возможности увеличения дохода). Таким образом, при увеличении дефицитного i-го ресурса на Δb_i единиц общий доход F увеличивается за счет выпуска дополнительно произведенной продукции на величину $\Delta F_z = \Delta b_i \cdot z_i^*$. При уменьшении ресурса доход уменьшится на величину ΔF_z.

Вывод: дефицитный ресурс имеет положительный предельный продукт в денежном выражении, а избыточный ресурс – нулевой. Чем больше предельный продукт ресурса, тем больший доход даст увеличение объема этого ресурса.

Экономический смысл второй теоремы двойственности (условий дополняющей нежесткости) для оптимальных планов взаимно двойственных задач: ***доходность продукции***.

Рассмотрим другие условия дополняющей нежесткости $x_j^* \cdot v_j^* = 0,\ j = \overline{1; n}$. Для двух множителей имеются следующие возможности.

Если $v_j^* \neq 0,\ j = \overline{1; n}$, то $x_j^* = 0$. Экономически это означает, что если v_j^* не равна нулю, то j-й вид продукции не входит в план производства как невыгодный. При включении в план выпуска 1 единицы j-й продукции доход уменьшится на величину v_j^*. Если $x_j^* > 0$, то $v_j^* = 0,\ j = \overline{1; n}$, т. е. j-й вид продукции входит в план производства как выгодный.

Вывод: v_j^* равна величине потери дохода при увеличении объема выпуска продукции j-го вида на одну единицу.

Таким образом, двойственные переменные как предельные продукты ресурсов в денежном выражении обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Предельный продукт ресурса в денежном выражении является мерой дефицитности ресурса: дефицитнее тот ресурс, у которого предельный продукт больше (увеличение этого ресурса даст больший прирост дохода).

Свойство 2. Предельный продукт ресурса в денежном выражении является мерой влияния правых частей ограничений (запасов ресурса) на значение целевой функции (общего дохода): при изменении запаса дефицитного ресурса доход изменяется, недефицитного – нет.

Задачи анализа на чувствительность оптимального плана

При анализе на чувствительность оптимального плана в задаче производственного планирования выделяются следующие *три задачи*.

1. Анализ изменения правых частей ограничений (объемов ресурсов): в каких пределах может изменяться объем ресурса, чтобы структура оптимального плана сохранилась?

Сохранение (устойчивость) структуры оптимального плана означает, что если в оптимальном плане объем выпуска некоторого вида продукции не равен нулю (продукция доходная), то при изменении объема ресурса объем выпуска этого вида продукции может быть другим числом, но также не равным нулю (продукция остается доходной). Объемы продукции, приносящей потери дохода, остаются равными нулю.

При анализе изменения объемов ресурсов рассматриваются два случая:

а) анализ изменения запасов дефицитных ресурсов: допустимые увеличение и уменьшение запаса дефицитного ресурса, при которых сохраняется структура оптимального плана и изменяется доход;

б) анализ изменения запасов недефицитных ресурсов: допустимые увеличение и уменьшение запаса недефицитного ресурса, при которых сохраняется структура оптимального плана и не изменяется доход.

2. Анализ изменения коэффициентов целевой функции (изменения цен на продукцию): в каких пределах могут изменяться коэффициенты целевой функции, чтобы при этом оптимальный план оставался неизменным.

Анализ оптимального решения на чувствительность в Excel проводится на основе отчетов *О результатах*, *Об устойчивости*, *О пределах*, получаемых с помощью надстройки Поиск решения в диалоговом окне Результаты поиска решения. В отчетах указываются допустимые увеличения и допустимые уменьшения параметров, при которых сохраняется устойчивость оптимальных планов.

В отчетах Excel, получаемых с помощью надстройки *Поиск решения*, оптимальное значение двойственной переменной z_i^* называется теневой ценой.

В отчетах Excel оптимальное значение дополнительной двойственной переменной v_j^* называется нормированной, или приведенной, стоимостью.

Анализ устойчивости оптимального решения. Основные исходные данные рассматриваемой задачи – это запасы ресурсов (b_i, где i = 1, ..., m) и величина прибыли на одну единицу выпускаемой продукции

(C_j, где $j = 1, ..., n$). Исследовать устойчивость – значит определить пределы изменения исходных данных, при которых не изменяется решение или же его структура. Отчет Excel *по устойчивости* дает допустимое увеличение и допустимое уменьшение по целевому коэффициенту C_j, при которых решение задачи остается прежним. Кроме того, в отчете по устойчивости приведены пределы увеличения и уменьшения правых частей ограничений b_i, при которых прежней остается структура решения. Под неизменностью структуры решения понимается следующее: те ресурсы, которые были дефицитными в исходном решении, остаются дефицитными и в новом оптимальном решении, хотя само решение (количество выпускаемых изделий) и значение целевой функции могут изменяться.

2.2. Пример решения задачи

Для производства продукции 4 типов (*Прод*1, *Прод*2, *Прод*3 и *Прод*4) требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Нормы расхода ресурсов и другие исходные данные приведены в таблице 11.

Таблица 11 – **Исходные данные к задаче планирования производства продукции**

Ресурсы	*Прод*1	*Прод*2	*Прод*3	*Прод*4	Наличие ресурса
Трудовые, чел.-ч	1	1	1	1	16
Сырье, кг	6	5	4	3	110
Финансы, тыс. р.	4	6	10	13	100
Прибыль, денежных единиц	60	70	120	130	–

Найдем оптимальный план производства продукции, а также ответим на следующие вопросы:

1. Какие типы продукции вошли в оптимальный план производства? Какова максимальная прибыль?
2. Какие ресурсы при этом израсходованы полностью, а какие – нет? Какой ресурс является наиболее дефицитным?
3. Как увеличится общая прибыль, если количество наиболее дефицитного ресурса увеличится на 1, а также 3 и 5 единиц?
4. Каковы пределы изменения исходных данных, при которых структура решения не изменяется?
5. Какая продукция является выгодной, а какая – нет? Какая продукция является наиболее невыгодной? Как изменится общая прибыль, если придется выпускать 1 или 3 единицы этой продукции?

Решение

Составим математическую модель задачи. Введем нижеуказанное обозначение: x_j – количество выпускаемой продукции j-го типа ($j = 1, ..., 4$).

Тогда по формулам (12)–(14) получаем следующее:

$$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100; \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, ..., 4). \end{cases} \tag{23}$$

Целевая функция представляет собой общую прибыль от производства продукции. Ограничения отражают конечность запасов ресурсов на предприятии. Неотрицательность переменных следует из их смысла.

Приведем исходную задачу к каноническому виду:

$$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100; \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, ..., 4); \quad y_i \ge 0 \quad (i = 1, ..., 3). \end{cases}$$

Дополнительные переменные (y_i) есть остатки ресурсов каждого вида.

Составим двойственную задачу к математической модели (23) с использованием формул (19)–(21):

$$F_Д = 16z_1 + 110z_2 + 100z_3 \to min;$$
$$\begin{cases} z_1 + 6z_2 + 4z_3 \ge 60; \\ z_1 + 5z_2 + 6z_3 \ge 70; \\ z_1 + 4z_2 + 10z_3 \ge 120; \\ z_1 + 3z_2 + 13z_3 \ge 130; \\ z_i \ge 0 \quad (i = 1, ..., 3). \end{cases}$$

Двойственные переменные z_i – это оценки ресурсов задачи (теневые цены). В двойственной задаче приведем ограничения к виду равенства, вычитая из левых частей ограничений дополнительные переменные (v_j):

$$F_Д = 16z_1 + 110z_2 + 100z_3 \to min;$$

$$\begin{cases} z_1 + 6z_2 + 4z_3 - v_1 = 60; \\ z_1 + 5z_2 + 6z_3 - v_2 = 70; \\ z_1 + 4z_2 + 10z_3 - v_3 = 120; \\ z_1 + 3z_2 + 13z_3 - v_4 = 130; \\ z_i \ge 0 \quad (i = 1, ..., 3); \quad v_j \ge 0 \quad (j = 1, ..., 4). \end{cases}$$

Дополнительные двойственные переменные (v_j) есть ***производственные потери*** на одну единицу продукции j-го типа.

Для решения задачи в Excel с помощью надстройки *Поиск решения* сформируем экран так, как показано на рисунках 8 (с открытыми формулами) и 9.

Вызовем надстройку *Поиск решения* и заполним окно поиска так, как показано на рисунке 10.

Затем активизируем процесс поиска и после его окончания в окне *Результаты поиска решения* выделим все три типа отчетов, используя клавишу Ctrl на клавиатуре (рисунок 11).

	A	B	C	D	E	F
1	Переменны					
2	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4		
3	0	0	0	0		
4	Ограничения					
5		Коэффициенты			Левая часть	Правая часть
6	1	1	1	1	=СУММПРОИЗВ($A$3:$D$3;A6:D6)	16
7	6	5	4	3	=СУММПРОИЗВ($A$3:$D$3;A7:D7)	110
8	4	6	10	13	=СУММПРОИЗВ($A$3:$D$3;A8:D8)	100
9	эффициенты целевой ф				Цель (прибыль)	
10	60	70	120	130	=СУММПРОИЗВ(A3:D3;A10:D10)	
11						

Рисунок 8 – **Экран Excel для решения задачи планирования производства продукции с открытыми формулами**

	A	B	C	D	E	F
1	Переменные					
2	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4		
3	0	0	0	0		
4	Ограничения					
5	Коэффициенты				Левая часть	Правая часть
6	1	1	1	1	0	16
7	6	5	4	3	0	110
8	4	6	10	13	0	100
9	Коэффициенты целевой ф-ии				Цель (прибыль)	
10	60	70	120	130	0	
11						

Рисунок 9 – **Экран Excel для решения задачи планирования производства продукции**

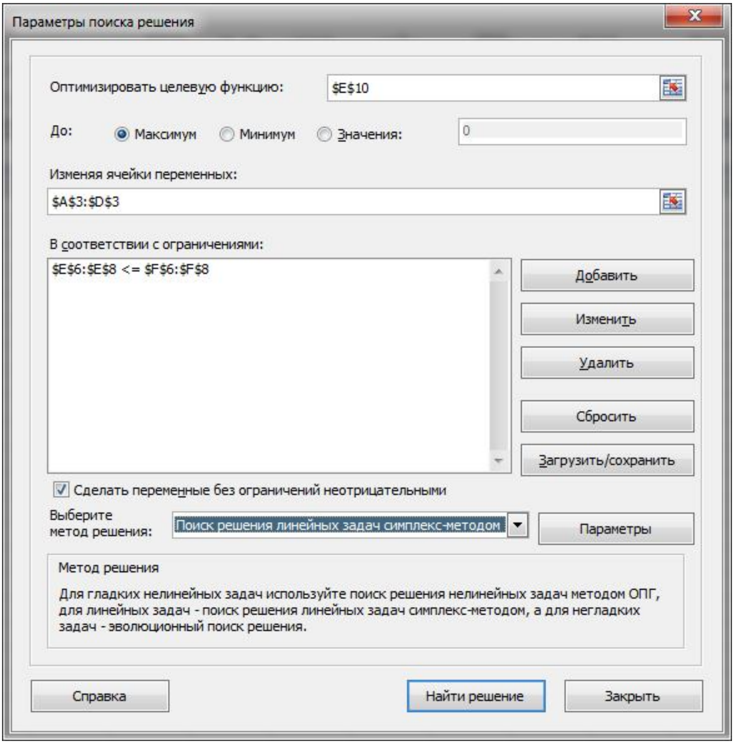


Рисунок 10 – **Окно *Параметры поиска решения* для решения задачи планирования производства продукции**

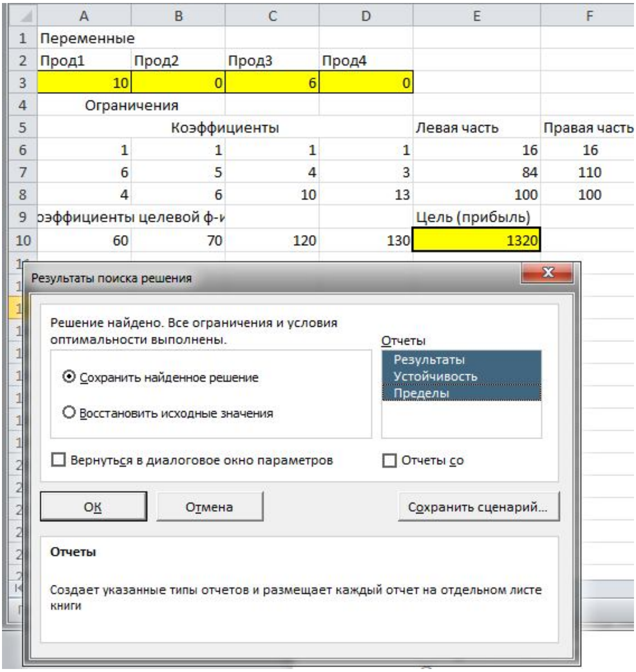


Рисунок 11 – **Окно *Результаты поиска решения***

Нажатие кнопки *OK* приведет к созданию новых листов рабочей книги: «Отчет о результатах», «Отчет об устойчивости» и «Отчет о пределах». Результаты решения на исходном рабочем листе будут сохранены. Содержимое всех отчетов показано на рисунках 12–14.

Отчет о результатах состоит из трех таблиц.

В 1-й таблице приводятся сведения о значениях целевой функции.

Во 2-й таблице представлены исходные и оптимальные значения переменных.

3-я таблица показывает результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий. В графе *Формула* приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно *Поиск решения*. В графе *Значение ячейки* приведены величины использованного ресурса (левая часть ограничений), а в графе *Допуск* показано количество неиспользованного ресурса (оптимальные значения дополнительных двойственных переменных y_i, где $i = 1, ..., m$). Если ресурс используется полностью, то в графе *Состояние* делается пометка «Привязка», в противном случае – «Без привязки».

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$E$10	Цель (прибыль)	0	1320

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$A$3	Прод1	0	10	Продолжить
$B$3	Прод2	0	0	Продолжить
$C$3	Прод3	0	6	Продолжить
$D$3	Прод4	0	0	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$E$6	Левая часть	16	$E$6<=$F$6	Привязка	0
$E$7	Левая часть	84	$E$7<=$F$7	Без привязки	26
$E$8	Левая часть	100	$E$8<=$F$8	Привязка	0

Рисунок 12 – **Отчет о результатах**

Отчет об устойчивости состоит из двух таблиц.

В 1-й таблице приводится информация по переменным:

• оптимальные значения переменных x_j^* (в столбце *Окончательное значение*) (j = 1, …, n);

• соответствующие значения показателя невыгодности продукции – производственных потерь (в столбце *Приведенн. Стоимость*), т. е. оптимальные значения дополнительных двойственных переменных v_j^* (j = 1, …, n);

• коэффициенты в целевой функции при переменных, заданные в условии;

• предельные значения приращения коэффициентов целевой функции (*Допустимое увеличение*, *Допустимое Уменьшение*), при которых структура решения задачи не изменяется.

Во 2-й таблице показаны аналогичные значения для ограничений:

• величины использованных ресурсов (*Окончательное Значение*);

• теневые цены (предельный продукт) для каждого ресурса, т. е. оптимальные значения двойственных переменных z_i^* (i = 1, …, m) (*Тень Цена*);

• предельные приращения ресурсов (Δb_1^+ и Δb_1^-), при которых сохраняется структура решения (*Допустимое увеличение*, *Допустимое Уменьшение*) (рисунок 13).

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$A$3	Прод1	10	0	60	40	12
$B$3	Прод2	0	-10	70	10	1E+30
$C$3	Прод3	6	0	120	30	13,33333333
$D$3	Прод4	0	-20	130	20	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$6	Левая часть	16	20	16	3,545454545	6
$E$7	Левая часть	84	0	110	1E+30	26
$E$8	Левая часть	100	10	100	60	36

Рисунок 13 – **Отчет об устойчивости**

Отчет о пределах показывает, как может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры этого решения. В отчете по пределам показаны значения целевой функции на нижнем и верхнем пределах для продукции, которая вошла в оптимальное решение (рисунок 14).

	Целевая функция	
Ячейка	Имя	Значение
$E$10	Цель (прибы.	1320

	Переменная		Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$A$3	Прод1	10	0	720	10	1320
$B$3	Прод2	0	0	1320	2,37E-15	1320
$C$3	Прод3	6	0	600	6	1320
$D$3	Прод4	0	0	1320	1,09E-15	1320

Рисунок 14 – **Отчет о пределах**

Анализ отчетов и окна с результатами решения дает возможность ответить на поставленные в задаче вопросы следующим образом:

1. $x_1^* = 10$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 6$; $x_4^* = 0$. Эти значения появились в ячейках A3:D3 после окончания поиска. Также их можно увидеть во 2-м блоке отчета о результатах. Таким образом, следует производить продукцию 1-го типа в количестве 10 единиц и продукцию 3-го типа в количестве 6 единиц. Продукцию 2-го и 4-го типов производить не нужно.

При таком плане производства будет получена максимальная прибыль $F^* = 1320$.

2. $y_1^* = 0$; $y_2^* = 26$; $y_3^* = 0$. Таким образом, полностью израсходованы трудовые ресурсы и финансы. Соответствующие ограничения имеют статус связанных. Сырья имеется остаток в количестве 26 единиц. К такому же выводу можно прийти, анализируя значения левой и правой частей ограничений на исходном листе. Из отчета об устойчивости можно получить следующие значения теневой цены:

$$z_1^* = 20;\ z_2^* = 0;\ z_3^* = 10.$$

Сопоставляя значения y_i и z_i, убеждаемся в справедливости 2-й теоремы двойственности: поскольку сырье имеется в избытке, его двойственная оценка равна 0. Теневые цены дефицитных трудовых ресурсов и финансов положительны. Причем, очевидно, трудовые ресурсы являются в этой задаче наиболее дефицитными, поскольку их теневая цена наибольшая.

3. Если количество трудовых ресурсов увеличить на 1, то общая прибыль возрастет на $z_1^* = 20$ единиц. Увеличение трудовых ресурсов на 3 единицы дает увеличение прибыли на $\Delta F = 3 \cdot z_1^* = 3 \cdot 20 = 60$ единиц, если структура решения при этом не изменится. Из отчета об устойчивости допустимое увеличение количества трудовых ресурсов (Δb_1^+) составляет 3,55, допустимое уменьшение (Δb_1^-) – 6. Это означает, что структура решения не изменяется, если $16 - 6 \le b_1 \le 16 + 3{,}55$, т. е. $10 \le b_1 \le 19{,}55$.

Поэтому, если количество трудовых ресурсов возрастет на 5 единиц, теорема об оценках перестанет действовать и мы не сможем количественно измерить увеличение прибыли.

4. Аналогично из отчета об устойчивости мы можем получить пределы изменения других исходных данных, при которых не изменяется структура решения:

$$16 - 6 \le b_1 \le 16 + 3{,}55 \quad \Rightarrow \quad 10 \le b_1 \le 19{,}55;$$

$$110 - 26 \le b_2 \quad \Rightarrow \quad 84 \le b_2;$$

$$100 - 36 \le b_3 \le 100 + 60 \quad \Rightarrow \quad 64 \le b_3 \le 160;$$

$$60 - 12 \le C_1 \le 60 + 40 \quad \Rightarrow \quad 48 \le C_1 \le 100;$$

$$C_2 \le 70 + 10 \quad \Rightarrow \quad C_2 \le 80;$$

$$120 - 13{,}3 \le C_3 \le 120 + 30 \quad \Rightarrow \quad 106{,}7 \le C_3 \le 150;$$

$$C_4 \le 130 + 20 \quad \Rightarrow \quad C_4 \le 150.$$

5. Из отчета об устойчивости можно получить значения дополнительных двойственных переменных (приведенная стоимость):

$$v_1^* = 0;\ v_2^* = 10;\ v_3^* = 0;\ v_4^* = 20.$$

Выгодной является та продукция, которая вошла в план производства ($x_j^* > 0$). Это *Прод*1 и *Прод*3. Для нее производственные потери равны $v_j^* = 0$. Невыгодной является продукция *Прод*2 и *Прод*4. Соответствующая приведенная стоимость положительна. Таким образом, и для переменных x_j^* и v_j^* выполняется 2-я теорема двойственности. Наиболее невыгодной при этом является продукция 4-го типа, поскольку v_4^* наибольшая. При выпуске одной единицы этой продукции общая прибыль уменьшается на 20 единиц. При выпуске 3 единиц этой продукции уменьшение прибыли составит $\Delta F = 3 \cdot v_4^* = 3 \cdot 20 =$ $= 60$ денежных единиц. Однако опытным путем можно установить, что при выпуске уже 4 единиц этой продукции структура оптимального плана нарушается, и прямая пропорциональная зависимость перестает действовать.

2.3. Задания для самостоятельной работы

Решите задачу планирования производства продукции на основании данных таблицы 12.

Таблица 12 – **Исходная информация для решения задачи планирования производства продукции**

Ресурс	*П*1	*П*2	*П*3	*П*4	Наличие
Вариант 1					
Прибыль, усл. ед.	60	60	40	60	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	1	3	2	20
Сырье, кг	7	2	4	8	50
Финансы, тыс. р.	5	2	4	6	100
Вариант 2					
Прибыль, усл. ед.	50	60	40	40	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	2	3	1	20
Сырье, кг	7	3	4	8	50
Финансы, тыс. р.	4	3	55	1	100
Вариант 3					
Прибыль, усл. ед.	50	40	30	70	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	4	3	2	30

Окончание таблицы 12

Ресурс	*П*1	*П*2	*П*3	*П*4	Наличие
Сырье, кг	7	5	4	8	50
Финансы, тыс. р.	4	3	3	1	100
Вариант 4					
Прибыль, усл. ед.	50	30	50	20	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	2	1	2	30
Сырье, кг	8	5	8	5	550
Финансы, тыс. р.	4	2	3	3	100
Вариант 5					
Прибыль, усл. ед.	50	50	50	50	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	2	1	7	30
Сырье, кг	8	4	8	5	50
Финансы, тыс. р.	4	2	5	1	100
Вариант 6					
Прибыль, усл. ед.	10	30	20	40	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	5	2	1	1	15
Сырье, кг	1	4	8	5	35
Финансы, тыс. р.	4	2	5	8	100
Вариант 7					
Прибыль, усл. ед.	5	10	30	20	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	1	2	2	15
Сырье, кг	7	2	4	3	25
Финансы, тыс. р.	5	4	2	1	100
Вариант 8					
Прибыль, усл. ед.	50	40	30	20	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	5	1	2	2	20
Сырье, кг	7	2	1	4	30
Финансы, тыс. р.	5	3	1	6	100

Контрольные вопросы

1. Каковы исходные данные задачи планирования производства продукции при ограничениях на ресурсы? Что требуется найти?
2. Приведите математическую модель задачи планирования производства продукции и поясните экономический смысл каждого выражения.
3. Что такое каноническая форма записи ЗЛП? Как можно привести линейную задачу к каноническому виду?

4. Приведите математическую модель задачи планирования производства продукции к каноническому виду и поясните экономический смысл дополнительных переменных.

5. Поясните, как составляется двойственная задача и в чем ее экономический смысл, на примере задачи планирования производства продукции.

6. В чем заключается экономический смысл 1-й теоремы двойственности?

7. Что такое теневая цена? В чем состоит ее основное свойство?

8. Что такое нормирующая стоимость? В чем состоит ее основное свойство?

9. Раскройте смысл 2-й теоремы двойственности.

10. Что значит «исследовать устойчивость решения»?

11. Как по отчетам Excel можно определить, какой ресурс является наиболее дефицитным?

12. Как по отчетам Excel можно определить, какая продукция является наиболее невыгодной?

Тема 3. ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

3.1. Основные теоретические сведения

Многие прикладные модели в экономике сводятся к задачам линейного программирования. Можно выделить несколько типов ЗЛП, основанных на специфике ограничений этих задач.

Рассмотрим так называемую транспортную задачу по критерию стоимости, которую можно сформулировать следующим образом.

В m пунктах отправления (A_1, A_2, ..., A_m), которые в дальнейшем мы будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим a_i ($i = 1, ..., m$). Данный продукт потребляется в n пунктах (B_1, B_2, ..., B_n), которые будем называть потребителями. Объем потребления обозначим b_j ($j = 1, ..., n$). Известны расходы на перевозку одной единицы продукта из пункта A_iв пункт B_j, которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C = \{c_{ij}\}$.

Требуется составить такой план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_iи полностью удовлетворяются потребности всех потребителей в пунктах B_j. Общая величина транспортных издержек при этом должна быть минимальной.

Транспортную задачу можно задавать таблицей, в которой указаны поставщики, потребители, запасы (a_i) и потребности (b_j) в грузах, стоимость перевозок одной единицы груза (c_{ij}) от поставщика i к потребителю j (таблица 13).

Таблица 13 – **Транспортная задача в матричной форме**

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	….	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	...	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	…	b_n	

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j, через x_{ij}. Математическая модель задачи выглядит так:

$$\begin{cases} f\left(\overline{X}\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min; & (24) \\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=1,...,m); & (25) \\ x_{ij}\ge 0. & (26) \end{cases}$$

Целевая функция (24) представляет собой суммарные расходы на перевозку грузов, которые необходимо минимизировать. Суммарные расходы рассчитываются как сумма произведений тарифов на перевозку одной единицы продукции на количество перевозимого груза (x_{ij}) от поставщика i к потребителю j по всем возможным перевозкам.

Условие (25) означает полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления, условие (26) определяет полный вывоз продукции от всех поставщиков. По экономическому смыслу задачи объемы перевозок (переменные x_{ij}) неотрицательны.

Выделяют закрытые транспортные задачи, в которых суммарный объем продукта, предлагаемого поставщиками, равен суммарному спросу потребителей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{27}$$

Кроме того, транспортные задачи могут быть открытыми. В этом случае суммарная производственная мощность поставщиков превышает спрос потребителей или спрос потребителей больше фактической суммарной мощности поставщиков, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Равенство (27) называется условием баланса. Его выполнение необходимо для решения задачи. Открытую задачу можно привести к закрытой, если указать фиктивного поставщика или потребителя и определить для него такие тарифы перевозок, которые были бы заранее невыгодны.

Решение транспортной задачи может быть автоматизировано с помощью надстройки Excel *Поиск решения*.

3.2. Пример решения задачи

В четырех хранилищах (A_1, A_2, A_3, A_4) имеется запас топлива в 40, 50, 60 и 30 т. Требуется спланировать перевозки топлива трем потребителям (B_1, B_2 и B_3), спрос которых соответственно равен 60, 80 и 40 т, чтобы затраты на транспортировку были минимальными. Стоимость перевозок 1 т топлива из каждого хранилища к каждому потребителю указана в таблице 14.

Таблица 14 – **Исходные данные для решения транспортной задачи**

Хранилище	Стоимость перевозки 1 т топлива потребителям, р.			Запасы топлива, т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	3	5	40
A_2	6	2	1	50
A_3	7	4	2	60
A_4	5	6	3	30
Потребность в топливе, т	60	80	40	–

Решение

Проверим, является ли задача закрытой. В хранилищах весь запас топлива составляет 180 т. Спрос равен 180 т. Потребление равно спросу, следовательно, условие баланса выполняется. Задача является закрытой. Заполним ячейки Excel соответствующими значениями, как показано на рисунке 15.

	A	B	C	D	E
1	Хранилище	Стоимость перевозки 1 т топлива потребителям, руб			Запасы топлива, т
2		B1	B2	B3	
3	A1	4	3	5	40
4	A2	6	2	1	50
5	A3	7	4	2	60
6	A4	5	6	3	30
7	Потребность в топливе	60	80	40	
8					
9		Количество топлива			
10		0	0	0	0
11		0	0	0	0
12		0	0	0	0
13		0	0	0	0
14		0	0	0	
15	Целевая функция				
16	0				

Рисунок 15 – **Экран Excel для решения транспортной задачи**

Зададим начальные значения количества перевозимого груза (т. е. переменных x_{ij}) в ячейках B10:D13. Так как план перевозок неизвестен, то необходимо заполнить ячейки нулями.

По условию задачи топливо должно быть полностью вывезено из хранилищ, поэтому рассчитаем количество вывозимого топлива для каждого хранилища. Для первого хранилища в ячейку E10 введем формулу

=СУММ(B10:D10).

Ячейки E11:E13, содержащие данные по остальным хранилищам, заполняются формулами аналогично. Можно скопировать формулу из ячейки E10 с помощью автозаполнения.

Потребители должны получить необходимый груз. Рассчитаем его количество. В ячейку B14 введем формулу для первого потребителя:

=СУММ(B10:B13).

В ячейки C14:D14 для остальных потребителей формулы вводятся аналогично (используется автозаполнение для того, чтобы скопировать формулу из ячейки B14).

Значение целевой функции (общие затраты на транспортировку груза), рассчитываемое по формуле (24), введем в ячейку A16:

СУММПРОИЗВ(B3:D6;B10:D13).

Начнем процесс поиска решения. Выберем пункт меню *Сервис/Поиск решения*. В окне *Поиск решения* установим следующие параметры, как показано на рисунке 16:

- целевую ячейку $A$16 равной минимальному значению;
- диапазон изменяемых ячеек (количество груза) B10:D13;
- ограничения.

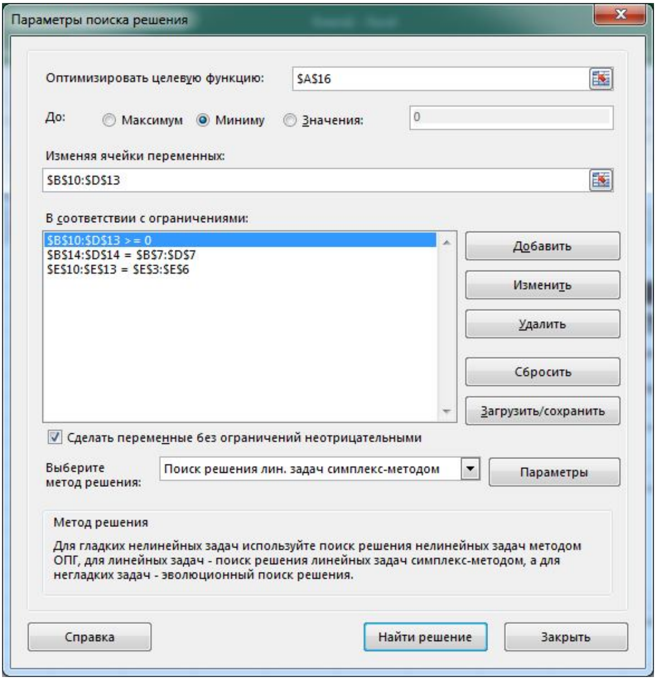


Рисунок 16 – **Окно *Поиска решения* для транспортной задачи**

Количество перевозимого груза должно быть неотрицательным:

$B$10:$D$13≥0.

Все потребители получат необходимое количество груза, если

$B$14:$D$14=$B$7:$D$7.

От всех поставщиков груз будет полностью вывезен, когда

$E$10:$E$13=$E$3:$E$6.

В окне *Параметры* установим флажок *Линейная модель*.

Запустим модель на выполнение, нажав кнопку *Выполнить* в окне *Поиск решения*. Когда поиск закончится, появится сообщение о том, что решение найдено, и на исходном листе появятся результаты решения задачи. В окне *Результаты поиска решения* установим переключатель в положение *Сохранить найденное решение* и нажмем *ОК* (рисунок 17).

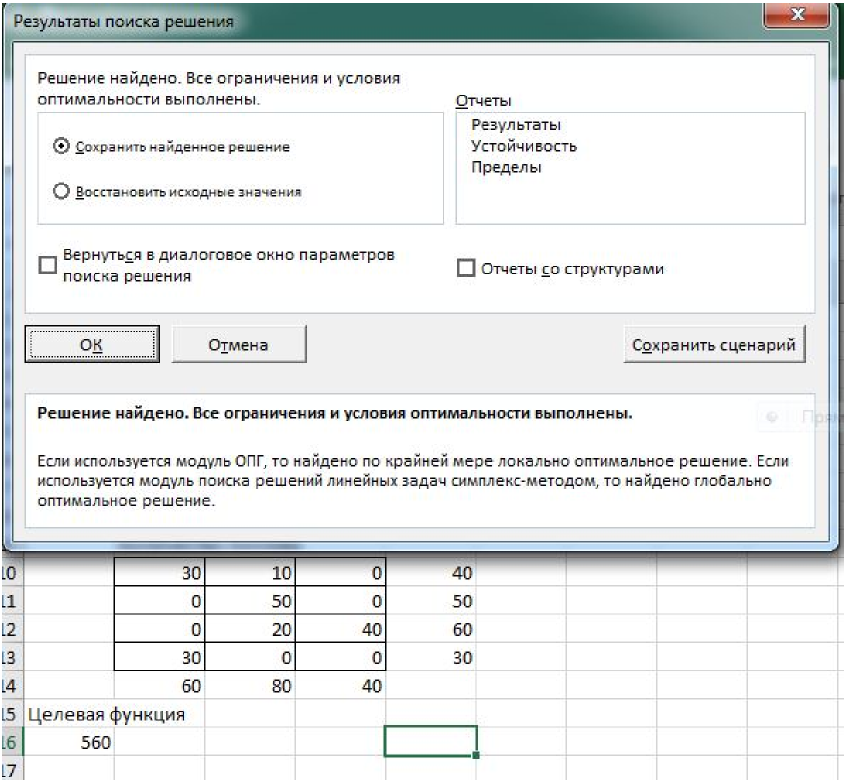


Рисунок 17 – **Решение транспортной задачи**

Итак, согласно решению задачи, 1-му потребителю топливо будет доставлено из 1-го (30 т) и 4-го (30 т) хранилищ. Таким образом, потребитель получит необходимые ему 60 т топлива (и так далее для всех потребителей).

Из 1-го хранилища топливо будет отправлено следующим потребителям: 1-му (30 т), 2-му (10 т), 4-му (40 т) (и так далее для всех поставщиков).

Общая стоимость перевозок при таком плане поставки составит 560 р.

3.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Составьте план перевозок каменного угля из трех пунктов отправления в четыре пункта назначения. План должен обеспечивать минимальные транспортные издержки. Суточная производительность шахт, потребность пунктов потребления и стоимость перевозки 1 т угля приведены в таблице 15.

Таблица 15 – **Данные о производительности шахт, потребностях заказчиков и стоимости перевозки 1 т угля потребителям**

Производитель (шахта)	Стоимость перевозки 1 т угля потребителям, р.				Производительность шахт, тыс. т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	4	50
Потребности заказчиков, тыс. т	75	80	60	85	–

Ответ: 805,

0	0	60	40
70	80	0	0
5	0	0	45

Вариант 2. Совхозы A_1, A_2, A_3 выделяют 40, 50 и 30 ц молока для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке даны в таблице 16. Организуйте снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные издержки были минимальными.

Таблица 16 – **Информация о стоимости перевозки 1 ц молока потребителям, потребностях заказчиков и количестве молока, предназначенного для вывоза**

Совхоз	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, р.				Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3,0	2,5	3,5	4,0	40
A_2	2,0	4,5	5,0	1,0	50
A_3	6,0	3,8	4,2	2,8	30
Потребности заказчиков, ц	20	40	30	30	–

Ответ: 296,

0	40	0	0
20	0	0	30
0	0	30	0

Вариант 3. В городе имеются четыре хлебозавода, которые снабжаются мукой от трех мелькомбинатов. Все необходимые данные приведены в таблице 17. Определите оптимальный план поставок муки, обеспечивающий минимальные расходы.

Таблица 17 – **Сведения о количестве поставленной муки, суточной производительности мелькомбинатов и тарифах перевозок**

Мелькомбинат	Стоимость перевозки 1 т муки на хлебозаводы, р.				Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
№ 1	4	2	4	7	25
№ 2	7	6	6	8	20
№ 3	2	2	3	6	35
Суточная потребность в муке, т	30	20	12	18	

Ответ: 291,

0	20	5	0
0	0	2	18
30	0	5	0

Вариант 4. С четырех складов необходимо вывезти картофель в пять торговых точек. Требуется закрепить поставщиков за торговыми

точками так, чтобы общая сумма затрат на перевозку была минимальной. Числовые данные задачи представлены в таблице 18.

Таблица 18 – **Информация о стоимости перевозки 1 т картофеля потребителям, объеме вывоза и потребностях заказчиков**

Склад (поставщик)	Стоимость перевозки 1 т груза потребителям, усл. ед.					Объем вывоза, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	2	3	6	1	50
A_2	5	3	4	2	6	160
A_3	3	4	7	3	2	70
A_4	2	6	5	4	3	100
Потребность, т	80	100	90	50	60	

Ответ: 1020,

0	0	50	0	0
0	100	20	40	0
0	0	0	10	60
80	0	20	0	0

Вариант 5. Однородный товар с четырех баз поставляется в четыре магазина. Потребности 1-го, 2-го, 3-го и 4-го магазинов в товаре соответственно равны 30, 80, 60 и 50 тыс. ед. Запасы товара на базах составляют 40, 60, 40 и 80 тыс. ед. Затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара (в усл. ед.) представлены следующей матрицей затрат:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 4{,}5 & 3 & 2 & 1{,}2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3{,}5 & 2{,}6 & 1{,}3 & 1{,}4 \\ 3{,}2 & 4{,}1 & 2{,}5 & 5{,}8 \end{bmatrix}.$$

Необходимо запланировать перевозки таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности магазинов, а затраты свести к минимуму.

Ответ: 528,

0	40	0	0
10	0	0	50
0	40	0	0
20	0	60	0

Вариант 6. Продукцию 3 заводов (a_1 = 40 тыс. ед.; a_2 = 50 тыс. ед.; a_3 = 30 тыс. ед.) необходимо доставить четырем потребителям, спрос которых распределяется следующим образом: $в_1$ = 20 тыс. ед.; $в_2$ = 50 тыс. ед.; $в_3$ = 20 тыс. ед.; $в_4$ = 30 тыс. ед. Известна матрица транспортных расходов на доставку 1 тыс. ед. с i-го завода j-му потребителю:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 6{,}5 & 4{,}3 & 5{,}1 & 4 \\ 3{,}0 & 7{,}4 & 3{,}5 & 6{,}3 \\ 4{,}3 & 5{,}7 & 6{,}5 & 3{,}8 \end{bmatrix}.$$

Определите оптимальный план прикрепления потребителей к заводам, минимизирующий транспортные расходы.

Ответ: 490,

0	40	0	0
20	10	20	0
0	0	0	30

Вариант 7. Собранный урожай зерна четырех совхозов районного производственного объединения должен быть перевезен на три элеватора: элеватор B_1 мощностью 90 тыс. т, элеватор B_2 мощностью 70 тыс. т, элеватор B_3 мощностью 50 тыс. т. Все числовые данные приведены в таблице 19.

Таблица 19 – **Сведения о затратах на перевозку 1 т зерна и о запасах зерна**

Совхоз	Затраты на перевозку 1 т зерна на элеваторы, р.			Запасы зерна, тыс. т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10,5	22,0	17,4	50
A_2	27,3	12,5	23,7	60
A_3	13,7	18,6	15,3	70
A_4	18,1	14,4	11,5	30

Определите план доставки зерна на элеваторы, минимизирующий транспортные издержки.

Ответ: 2656,

50	0	0
0	60	0
40	0	30
0	10	20

Вариант 8. Автопарки города с ежемесячной потребностью в бензине соответственно в 40, 30, 80, 60 и 50 т снабжаются бензохранилищами вместимостью 55, 70, 35 и 100 т. Доставка горючего из бензохранилищ осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в таблице 20. Требуется составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные транспортные издержки.

Таблица 20 – **Данные о стоимости перевозки 1 т груза, усл. ед.**

Бензохранилище	Стоимость перевозки 1 т груза потребителям автопарком				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
№ 1	4	2	3	6	1
№ 2	5	3	4	2	6
№ 3	3	4	7	3	2
№ 4	2	6	5	4	3

Ответ: 715,

0	30	25	0	0
0	0	10	60	0
0	0	0	0	35
40	0	45	0	15

Контрольные вопросы

1. Каковы исходные данные транспортной задачи? Что в ней нужно найти?
2. Приведите математическую модель транспортной задачи и поясните экономический смысл каждого выражения.
3. Как в Excel задается условие вывоза всей продукции от каждого поставщика?
4. Как в Excel задается условие того, что потребность каждого потребителя должна быть полностью удовлетворена?
5. Какие транспортные задачи называются открытыми, а какие – закрытыми? Как решаются открытые задачи?

Тема 4. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

4.1. Основные теоретические сведения

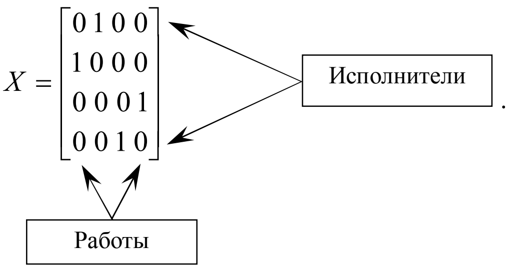
Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Кроме того, эту задачу можно отнести к классу задач дискретного (а точнее – целочисленного программирования), поскольку в ней на переменные накладываются условия целочисленности.

Постановка задачи. Имеется n различных работ, каждая из которых может быть выполнена одним из n исполнителей. Известны затраты C_{ij}, связанные с выполнением работы j исполнителем i. Необходимо найти такой вариант назначения исполнителей на работы, чтобы общие затраты были наименьшими. При этом каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, а каждая работа может быть поручена одному исполнителю.

Составим математическую модель задачи. Введем переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й исполнитель назначается на } j\text{-ю работу;} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Например, матрица переменных задачи может выглядеть так:



Такая запись означает, что 1-й исполнитель назначается на 2-ю работу, 2-й исполнитель – на 1-ю и т. д.

Поскольку в задаче требуется, чтобы общие затраты были наименьшими, целевая функция будет представлять собой общие затраты на выполнение работ. Ее следует минимизировать:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{28}$$

При этом накладываются следующие ограничения:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; & (29) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; & (30) \\ x_{ij} \in \{0,1\}; \\ (i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., n). \end{cases}$$

Ограничение (29) (суммирование по строке) означает, что каждый исполнитель назначается только на одну работу, а ограничение (30) (суммирование по столбцу) – что каждая работа может быть поручена только одному исполнителю.

Если рассмотреть задачу о назначениях как частный случай транспортной задачи, то очевидно, что $a_i = 1$ ($i = 1, ..., n$) и $b_j = 1$ ($j = 1, ..., n$). Условие баланса (27) означает здесь, что число работ равно числу исполнителей. Если это не так, то в задачу нужно ввести недостающее число фиктивных работ или исполнителей с достаточно большими штрафными затратами C_{ij}.

Отметим, что возможна также другая постановка задачи о назначениях, когда заданы не затраты C_{ij}, а прибыли, связанные с назначением исполнителя i на работу j. В этом случае целевая функция представляет собой общую прибыль, и нужно найти ее максимум.

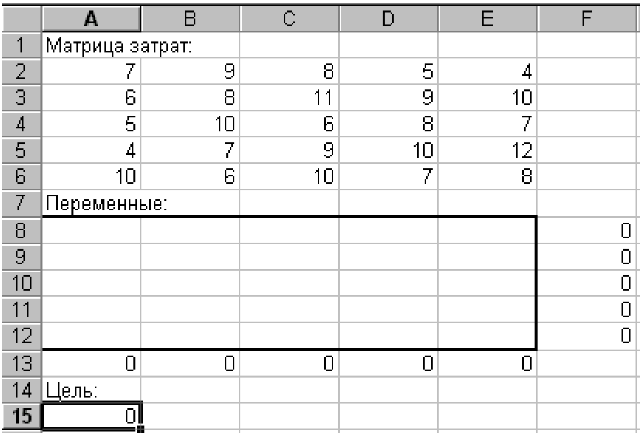
4.2. Пример решения задачи

Имеется 5 работ и 5 исполнителей. Дана матрица затрат $\{C_{ij}\}_{n\times n}$:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 11 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 10 & 12 \\ 10 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Требуется назначить исполнителей на работы так, чтобы общие затраты на выполнение работ были минимальны. При этом каждый исполнитель назначается только на одну работу, а каждая работа поручается только одному исполнителю.

Сформируем экран Excel так, как показано на рисунке 18.



	A	B	C	D	E	F
1	Матрица затрат:					
2	7	9	8	5	4	
3	6	8	11	9	10	
4	5	10	6	8	7	
5	4	7	9	10	12	
6	10	6	10	7	8	
7	Переменные:					
8						0
9						0
10						0
11						0
12						0
13	0	0	0	0	0	
14	Цель:					
15	0					

Рисунок 18 – **Подготовка исходных данных для решения задачи о назначениях**

В ячейки A2:E6 введены исходные данные задачи: значения затрат C_{ij}. Ячейки A8:E12 отведены под значения переменных. Можно заполнить эти ячейки некоторыми начальными значениями (например, нулями). Пустые ячейки Excel также рассматривает как нулевые. В ячейки F8:F12 введены формулы, которые задают число назначений для каждого исполнителя:

=СУММ(A8:E8)
=СУММ(A9:E9)
=СУММ(A10:E10)
=СУММ(A11:E11)
=СУММ(A12:E12)

.

В ячейки A13:E13 введены формулы, задающие число исполнителей, которым поручена каждая работа:

=СУММ (A8:A12)	=СУММ (B8:B12)	=СУММ (C8:C12)	=СУММ (D8:D12)	=СУММ (E8:E12)

.

В ячейку A15 записано значение целевой функции (общие затраты):

=СУММПРОИЗВ(A2:E6;A8:E12)

.

Затем вызовем средство *Поиск решения* и заполним окно *Поиск решения* так, как показано на рисунке 19.

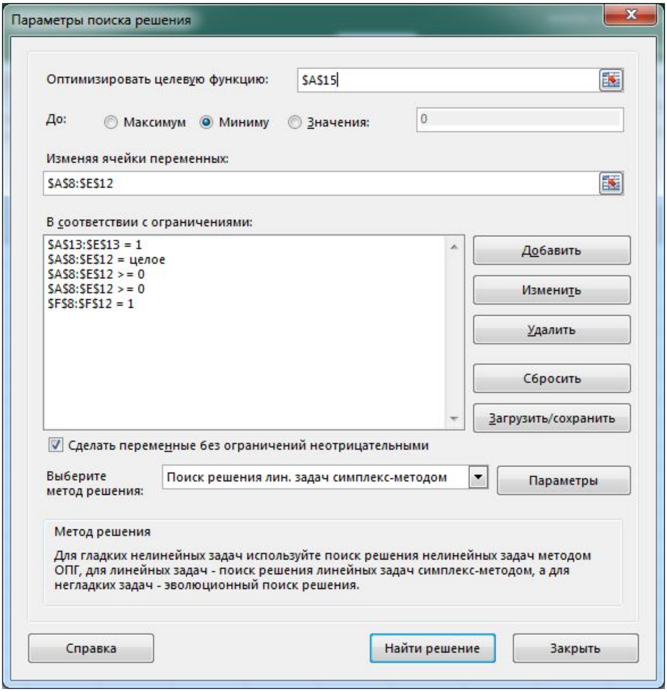


Рисунок 19 – **Окно *Поиск решения* для решения задачи о назначениях**

1-е ограничение в списке соответствует ограничению (30), т. е. задает условие, при котором каждая работа может быть поручена только одному исполнителю. Последнее ограничение соответствует ограничению (29), т. е. означает, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу. 2-е, 3-е и 4-е ограничения задают условие $x_{ij} \in \{0,1\}$.

Также нажмем кнопку *Параметры* и установим флажок *Линейная модель* в окне *Параметры*. Далее активизируем поиск, нажав кнопку *Выполнить*. Excel найдет оптимальное решение в соответствии с условием задачи. В окне *Результаты поиска решения* установим переключатель в положение *Сохранить найденное решение* и нажмем *ОК*. Тип отчета в данной задаче выбирать не нужно. Результат решения задачи (вид листа Excel) показан на рисунке 20.

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица затрат:					
2	7	9	8	5	4	
3	6	8	11	9	10	
4	5	10	6	8	7	
5	4	7	9	10	12	
6	10	6	10	7	8	
7	Переменные:					
8	0	0	0	0	1	1
9	0	1	0	0	0	1
10	0	0	1	0	0	1
11	1	0	0	0	0	1
12	0	0	0	1	0	1
13	1	1	1	1	1	
14	Цель:					
15	29					

Рисунок 20 – **Результат решения задачи о назначениях**

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимальными являются следующие назначения:

- 1-го исполнителя на 5-ю работу;
- 2-го исполнителя на 2-ю работу;
- 3-го исполнителя на 3-ю работу;
- 4-го исполнителя на 1-ю работу;
- 5-го исполнителя на 4-ю работу.

Общие затраты при этом составят 29 денежных единиц. Никакими другими назначениями нельзя достигнуть меньшего уровня общих затрат.

4.3. Задания для самостоятельной работы

Решите задачу о назначениях на основании данных таблицы 21.

Таблица 21 – **Исходная информация для решения задачи о назначениях**

Вариант	Матрица затрат $\{C_{ij}\}$					Ответ					
						цель	назначения				
1	5	7	6	3	2	19	0	0	0	0	1
	4	6	9	7	8		0	1	0	0	0
	3	8	4	6	5		0	0	1	0	0
	2	5	7	8	10		1	0	0	0	0
	8	4	8	5	6		0	0	0	1	0
2	6	8	7	4	3	24	0	0	0	0	1
	5	7	10	8	9		0	1	0	0	0
	4	9	5	7	6		0	0	1	0	0
	3	6	8	9	11		1	0	0	0	0
	9	5	9	6	7		0	0	0	1	0

Окончание таблицы 21

Вариант	Матрица затрат $\{C_{ij}\}$					Ответ					
						цель	назначения				
3	7	11	7	6	5	32	0	0	0	1	0
	6	10	9	12	9		1	0	0	0	0
	10	8	5	7	11		0	0	1	0	0
	7	7	6	8	10		0	1	0	0	0
	8	10	7	9	8		0	0	0	0	1
4	5	9	5	4	3	22	0	0	0	1	0
	4	8	7	10	7		1	0	0	0	0
	8	6	3	5	9		0	0	1	0	0
	5	5	4	6	8		0	1	0	0	0
	6	8	5	7	6		0	0	0	0	1
5	6	10	6	5	4	27	0	0	0	1	0
	5	9	8	11	8		1	0	0	0	0
	9	7	4	6	10		0	0	1	0	0
	6	6	5	7	9		0	1	0	0	0
	7	9	6	8	7		0	0	0	0	1
6	8	11	7	6	4	26	0	0	0	0	1
	4	10	9	12	5		1	0	0	0	0
	6	7	5	7	11		0	0	1	0	0
	7	5	6	5	10		0	0	0	1	0
	9	8	7	10	8		0	1	0	0	0
7	6	9	5	4	2	17	0	0	0	0	1
	4	8	7	10	3		1	0	0	0	0
	7	5	4	3	9		0	0	0	1	0
	5	6	5	7	8		0	0	1	0	0
	4	3	3	5	6		0	1	0	0	0
8	9	12	8	7	5	30	0	0	0	0	1
	5	11	10	13	6		1	0	0	0	0
	10	8	7	6	12		0	0	0	1	0
	8	9	8	10	11		0	0	1	0	0
	7	6	6	8	9		0	1	0	0	0

Контрольные вопросы

1. Как можно классифицировать задачу о назначениях?
2. Каковы исходные данные задачи о назначениях? Что в ней требуется найти?
3. Как формализуется факт назначения или неназначения исполнителей на работы? Приведите математическую модель задачи и поясните смысл всех выражений.

4. Что означает условие баланса для задачи о назначениях?

5. Как задать условие целочисленности $x_{ij} \in \{0,1\}$ в виде ограничений для средства *Поиск решения*?

6. Как задается в Excel условие назначения только одного исполнителя на каждую работу?

7. Как задается в Excel условие того, что каждому исполнителю может быть поручена только одна работа?

Раздел II. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Тема 5. БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ

5.1. Основные теоретические сведения. Понятие балансовой модели

Балансовые модели широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе лежит балансовый метод – взаимное сопоставление имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Балансовая модель – система уравнений, которые выражают требование баланса между производимым количеством продукции и потребностью в ней.

В модели межотраслевого баланса все народное хозяйство представляется в виде совокупности n отраслей, каждая из которых рассматривается как производящая и как потребляющая (таблица 22).

Таблица 22 – **Схема межотраслевого баланса**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y	Валовая продукция, X
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…		…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n

Обозначим валовую продукцию, произведенную n отраслями X_1, X_2, …, X_n. Вся продукция i-отрасли (X_i) разделяется на промежуточную или межотраслевую (x_{ij}) и конечную (Y_i), где i и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих:

$$\begin{aligned} &X_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + Y_1, \\ &X_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + Y_2, \\ &\ldots \\ &X_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + Y_n. \end{aligned} \tag{31}$$

Промежуточную продукцию x_{ij} все отрасли потребляют внутри себя для текущего производства конечной продукции. Конечная продукция Y_i выходит из производства в область конечного использования (на рынок, в другие внешние производства).

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет технологическая матрица-таблица, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции, имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{32}$$

где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$;

$i = \overline{1, n}$;

$j = \overline{1, n}$.

Предполагается, что для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равной a_{ij}. Эти затраты не зависят от объема производства в отрасли и являются стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются коэффициентами прямых материальных затрат.

Коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} показывают количество продукции i-й отрасли, использованной при производстве единицы продукции j-й отрасли.

Объем промежуточной продукции x_{ij} можно выразить через коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} и объем валовой продукции X_j следующим образом:

$$x_{ij} = a_{ij}X_j.$$

Тогда систему уравнений (31) с учетом коэффициентов прямых материальных затрат можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + Y_1,\\
&X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + Y_2,\\
&\ldots\\
&X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n + Y_n
\end{aligned} \qquad (33)$$

или

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = \overline{1, n}\,. \qquad (34)$$

Введем обозначения: X – вектор-столбец валовой продукции, Y – вектор столбец конечной продукции:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (33) можно записать в матричной форме:

$$X = AX + Y, \qquad (35)$$

Система уравнений (33) или в матричной форме (35) называется *экономико-математической моделью межотраслевого баланса*.

С помощью балансовой модели можно выполнять три варианта расчетов:

1. Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли X, можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли Y по формуле

$$Y = (E - A)\,X. \qquad (36)$$

2. Задав величины конечной продукции каждой отрасли Y, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли X следующим образом:

$$X = (E - A)^{-1} Y, \qquad (37)$$

где E – единичная матрица размерности $n \times n$;

$(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная* к матрице $(E - A)$.

3. Для ряда отраслей, задав величины валовой продукции X, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции Y, можно найти величины конечной продукции первых отраслей Y и объемы валовой продукции вторых отраслей X. В этом варианте расчета удобнее использовать систему линейных уравнений (33).

Введем обозначение $P = (E - A)^{-1}$, тогда систему уравнений в матричной форме (37) можно записать в следующем виде:

$$X = PY. \tag{38}$$

Матрица $P = \left(p_{ij}\right)_{n \times n}$ называется *матрицей коэффициентов полных материальных затрат* и включает в себя все затраты.

Коэффициенты полных материальных затрат p_{ij} показывают, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных материальных затрат p_{ij} применяются также для определения прироста объемов валовой продукции при изменении объемов конечной продукции:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \Delta Y_j , \tag{39}$$

где ΔX_i и ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

5.2. Пример решения задачи

Баланс для трех отраслей за отчетный период представлен в таблице 23.

Найдите следующее:

1. Объемы производства валовой продукции в отчетном периоде.
2. Коэффициенты прямых материальных затрат.
3. Коэффициенты полных материальных затрат.

---

* Обратной называется матрица, которая при умножении на исходную дает в результате единичную, т. е. $(E - A) \cdot (E - A)^{-1} = (E - A)^{-1} \cdot (E - A) = E$. Если $det(E - A) \neq 0$, т. е. матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует.

Определите объем валовой продукции X_1^n, X_2^n, X_3^n для планируемого периода при плане конечной продукции $Y_1^n = 80$, $Y_2^n = 110$, $Y_3^n = 160$.

Таблица 23 – **Исходные данные для решения задачи**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	1	2	3	
1	50	40	20	60
2	30	10	80	100
3	60	40	10	120

Решение

Выполним решение с помощью приложения Excel. Заполним данными задачи лист как показано на рисунке 21.

1. Найдем объемы валовой продукции X каждой отрасли в ячейках F4:F6 по формуле (31).

Для этого в ячейку F4 запишем формулу

=СУММ(B4:E4),

а затем скопируем ее в ячейки F5 и F6. Получим: $X_1 = 170$, $X_2 = 220$, $X_3 = 230$.

2. Рассчитаем матрицу коэффициентов прямых материальных затрат в ячейках B10:D12 по формуле (32).

Для нахождения коэффициентов первого столбца матрицы введем в ячейку B10 формулу

=B4/$F$4,

а затем скопируем ее в ячейки F5 и F6. Коэффициенты второго и третьего столбцов матрицы рассчитываются аналогично. Получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}18 & 0{,}09 \\ 0{,}18 & 0{,}05 & 0{,}35 \\ 0{,}35 & 0{,}18 & 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

3. Рассчитаем матрицу коэффициентов полных материальных затрат в ячейках F15:H17 по формуле

$$P = (E - A)^{-1}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Распределение продукции по отраслям	Отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60		80	
5	2	30	10	80	100		110	
6	3	60	40	10	120		160	
7								
8								
9		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
10								
11								
12								
13								
14		E-A				Коэффициенты полных материальных затрат, P		
15								
16								
17								

Рисунок 21 – **Исходные данные**

В балансе рассматриваются 3 отрасли, поэтому в ячейках F10:H12 запишем единичную матрицу *E* размерности 3×3:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В ячейках B15:D17 рассчитаем матрицу $E - A$. Для этого в ячейку B15 введем формулу

=F10-B10,

а затем скопируем ее в остальные ячейки. Получим

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}71 & -0{,}18 & -0{,}09 \\ -0{,}18 & 0{,}95 & -0{,}35 \\ -0{,}35 & -0{,}18 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы $E - A$ составляет 3×3, следовательно размерность матрицы *P* будет такой же. Для нахождения обратной матрицы используем функцию =МОБР(). Это функция массива.

Функции массивов обладают следующими особенностями:

- функцию массива можно изменять или удалять только для всего массива целиком, а для одной ячейки невозможно;
- аргументы функций можно изменять только для всего массива сразу, а не для одной ячейки;

• в строке формул функции массива записываются в фигурных скобках, например {=МОБР(A12:B13)}.

Для расчета матрицы коэффициентов полных материальных затрат P:

1) выделим диапазон ячеек F15:H17;

2) вызовем мастер функций и выберем из категории *Математические* функцию МОБР(), которая возвращает в качестве результата массив – обратную матрицу. В качестве аргумента функции укажем диапазон ячеек B15:D17, в котором вычислена матрица $E - A$

=МОБР(B15:D17)

3) для получения результата нажмем одновременно клавиши <Ctrl>, <Shift> и <Enter>. В ячейках F15:H17 появится результат – матрица P:

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}65 & 0{,}37 & 0{,}28 \\ 0{,}57 & 1{,}25 & 0{,}51 \\ 0{,}72 & 0{,}37 & 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

4. Найдем объемы валовой продукции планового периода по формуле (38). Для вычисления воспользуемся функцией =МУМНОЖ() категории *Математические*, которая также является функцией массива. Для нахождения валовой продукции планового периода выполним следующее:

1) выделим диапазон ячеек H4:H6;

2) с помощью *Мастера функций* выберем функцию =МУМНОЖ();

3) в качестве аргументов укажем: массив 1 (матрица P) – диапазон ячеек F15:H17, массив 2 (конечная продукция планового периода Y^n) – диапазон ячеек G4:G6; в строке формул увидим

=МУМНОЖ(F15:H17;G4:G6)

4) одновременно нажмем клавиши <Ctrl>,<Shift> и <Enter>. В ячейках H4:H6 появится результат – валовая продукция планового периода X:

$$X^n = \begin{pmatrix} 218 \\ 264 \\ 298 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для планируемого периода объем валовой продукции $X_1^n = 218$, $X_2^n = 264$, $X_3^n = 298$ при плане конечной продукции $Y_1^n = 80$, $Y_2^n = 110$, $Y_3^n = 160$. Численное решение задачи представлено на рисунке 22.

Решение задачи в режиме формул представлено на рисунке 23.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Распределение продукции по отраслям	Отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60	170	80	218
5	2	30	10	80	100	220	110	264
6	3	60	40	10	120	230	160	298
7								
8								
9		Коэффициенты прямых материальных затрат, А				Единичная матрица, Е		
10		0,29	0,18	0,09		1	0	0
11		0,18	0,05	0,35		0	1	0
12		0,35	0,18	0,04		0	0	1
13								
14		E-A				Коэффициенты полных материальных затрат, Р		
15		0,71	-0,18	-0,09		1,65	0,37	0,28
16		-0,18	0,95	-0,35		0,57	1,25	0,51
17		-0,35	-0,18	0,96		0,72	0,37	1,25

Рисунок 22 – **Числовое решение задачи**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Распределение продукции по отраслям	Отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60	=СУММ(B4:E4)	80	=МУМНОЖ(F15:H17;G4:G6)
5	2	30	10	80	100	=СУММ(B5:E5)	110	=МУМНОЖ(F15:H17;G4:G6)
6	3	60	40	10	120	=СУММ(B6:E6)	160	=МУМНОЖ(F15:H17;G4:G6)
7								
8								
9		Коэффициенты прямых материальных затрат, А				Единичная матрица, Е		
10		=B4/$F$4	=C4/$F$5	=D4/$F$6		1	0	0
11		=B5/$F$4	=C5/$F$5	=D5/$F$6		0	1	0
12		=B6/$F$4	=C6/$F$5	=D6/$F$6		0	0	1
13								
14		E-A				Коэффициенты полных материальных затрат, Р		
15		=F10-B10	=G10-C10	=H10-D10		=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)
16		=F11-B11	=G11-C11	=H11-D11		=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)
17		=F12-B12	=G12-C12	=H12-D12		=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)

Рисунок 23 – **Решение задачи в режиме формул**

5.3. Задача для самостоятельной работы

Баланс для трех отраслей за отчетный период представлен в таблице 24.

Определить следующее:

1. Объемы валовой продукции.
2. Матрицы коэффициентов прямых и полных материальных затрат.
3. Объем валовой продукции для планируемого периода X_1^n, X_2^n, X_3^n при плане конечной продукции Y_1^n, Y_2^n, Y_3^n.

Решить задачу в соответствии с приведенными в таблице 25 вариантами.

Таблица 24 – **Исходные данные для решения задачи**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0
	1	2	3	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	Y_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	Y_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	Y_3

Таблица 25 – **Варианты для решения задачи**

Номер варианта	Отчетный период					Плановый период
	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0	Плановая конечная продукция, Y^n
		1	2	3		
1	1	10	15	20	50	65
	2	20	25	30	70	80
	3	25	30	15	40	44
2	1	50	60	40	90	96
	2	80	20	30	80	84
	3	90	50	65	95	120
3	1	50	40	60	90	96
	2	10	30	25	50	55
	3	60	40	35	70	82
4	1	60	50	80	95	114
	2	25	45	50	80	83
	3	30	40	45	60	70
5	1	50	40	70	90	100
	2	60	10	20	70	94
	3	30	50	60	80	88
6	1	20	25	45	60	62
	2	35	40	20	70	86
	3	80	50	30	60	88
7	1	50	40	20	70	72
	2	60	15	25	85	94
	3	35	30	30	60	62
8	1	80	85	90	90	128
	2	30	45	60	80	86
	3	20	50	45	90	102

Контрольные вопросы

1. Что такое валовая, конечная и промежуточная продукция?
2. Что связывает между собой конечную и промежуточную продукцию?
3. Что показывают коэффициенты прямых материальных затрат?
4. Как, зная коэффициенты прямых материальных затрат и объемы валовой продукции каждой отрасли, определить объемы промежуточной продукции?
5. Как определить объемы конечной продукции каждой отрасли, зная объемы валовой продукции каждой отрасли и коэффициенты прямых материальных затрат?
6. Как определить объемы валовой продукции каждой отрасли, зная объемы конечной продукции каждой отрасли и коэффициенты прямых материальных затрат?
7. Что показывают коэффициенты полных материальных затрат?
8. Как в Excel вводятся формулы массива, какие правила необходимо соблюдать?

Тема 6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЕФИЦИТНЫХ РЕСУРСОВ В МОДЕЛЯХ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

6.1. Основные теоретические сведения

На практике для выпуска планового объема валовой продукции X требуется использовать следующие ограниченные (дефицитные) ресурсы производства:

а) производственные фонды (основные, оборотные, заработная плата);

б) природные ресурсы (воды, ископаемые, леса);

в) трудовые ресурсы;

г) продукция других внешних систем (импорт);

д) другие виды ресурсов.

Включение дефицитных ресурсов в модель осуществляется следующим образом.

Пусть имеется m дефицитных ресурсов R_1, R_2, …, R_m и их потребление отраслями за отчетный период известно (таблица 26).

Таблица 26 – **Схема межотраслевого баланса с учетом дефицитных ресурсов**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y	Валовая продукция, X
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…		…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Ресурсы						
1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}		
2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}		
…	…	…		…		
m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}		

Обозначим через r_{ij} – количество i-ресурса, потребленного j-отраслью; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$:

$$\begin{aligned} &R_1 = r_{11} + r_{12} + \ldots + r_{1n}, \\ &R_2 = r_{21} + r_{22} + \ldots + r_{2n}, \\ &\ldots \\ &R_m = r_{m1} + r_{m2} + \ldots + r_{mn}. \end{aligned} \tag{40}$$

Количество израсходованных ресурсов и объем произведенной валовой продукции связывают коэффициенты прямых затрат ресурсов, которые можно представить в виде матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где $b_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{X_j}$;

$i=\overline{1,m}$;

$j=\overline{1,n}$.

Величины b_{ij} в балансовых моделях не зависят от объема потребления ресурсов в отрасли и являются стабильной величиной во времени.

Коэффициенты прямых затрат ресурсов b_{ij} обозначают объем i-ресурса, необходимого для производства единицы продукции j-отрасли.

Пусть на планируемый период известны выделенные объемы каждого ресурса R^n. Их количество должно обеспечивать выпуск валовой продукции X^n в требуемом объеме. Зная коэффициенты прямых затрат ресурсов b_{ij}, можно рассчитать требующийся объем ресурсов каждого вида R_i^{mp}, необходимых для выпуска валовой продукции X^n в требуемом объеме:

$$\begin{aligned} &R_1^{mp} = b_{11}X_1^n + b_{12}X_2^n + \ldots + b_{1n}X_n^n; \\ &R_2^{mp} = b_{21}X_1^n + b_{22}X_2^n + \ldots + b_{2n}X_n^n; \\ &\ldots \\ &R_m^{mp} = b_{m1}X_m^n + b_{m2}X_2^n + \ldots + b_{mn}X_m^n. \end{aligned} \tag{42}$$

Систему уравнений (42) можно записать в матричной форме:

$$R^{mp} = BX, \tag{43}$$

где $R^{mp} = \begin{bmatrix} R_1^{mp} \\ R_2^{mp} \\ \ldots \\ R_m^{mp} \end{bmatrix}$ – вектор-столбец требующихся ресурсов.

Для обеспечения планируемого выпуска валовой продукции X^n необходимо выполнение следующего условия:

$$R^{mp} \le R^n. \tag{44}$$

Формула (42) позволяет найти общие потребности в ресурсах при заданном объеме валовой продукции.

6.2. Пример решения задачи

Рассмотрим трехотраслевое производство. Данные по балансу продукции и затратам ресурсов за отчетный период приведены в таблице 27.

Задан план выпуска конечной продукции $Y_1^n = 80$, $Y_2^n = 120$ и $Y_3^n = 150$ на следующий период. Под него выделены ресурсы в следующих объемах: $R_1^n = 120$; $R_2^n = 550$; $R_3^n = 265$.

1. Определить, достаточно ли выделено ресурсов под план выпуска конечной продукции.

2. В случае недостаточности ресурсов рассчитать возможный план выпуска конечной продукции при выделенных объемах ресурсов.

Таблица 27 – **Данные о выпуске продукции и потребление ресурсов в отчетном периоде**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	1	2	3	
1	50	40	20	60
2	30	10	80	100
3	60	40	10	120
Ресурсы				
1	30	20	50	
2	150	170	120	
3	80	60	70	

Решение

Выполним решение с помощью приложения Excel. Заполним данными задачи лист как показано на рисунке 24.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60		80	
5	2	30	10	80	100		120	
6	3	60	40	10	120		150	
7	Ресурсы, Ro						Ресурсы выделенные, Rп	Ресурсы требующиеся, Rт
8	1	30	20	50			120	
9	2	150	170	120			550	
10	3	80	60	70			265	
11								
12		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
13								
14								
15								
16								
17								
18		Коэффициенты полных материальных затрат, P				E-A		
19								
20								
21								
22								
23		Коэффициенты прямых затрат ресурсов, B						
24								
25								
26								

Рисунок 24 – **Исходные данные**

1. План выпуска конечной продукции зависит от плана выпуска валовой продукции, см. формулу (38). Поэтому, в первую очередь, необходимо рассчитать план выпуска валовой продукции. Для этого выполним следующее:

• Найдем объем валовой продукции в отчетном периоде (см. тему 5):

$$X = \begin{pmatrix} 170 \\ 220 \\ 230 \end{pmatrix}.$$

• Найдем коэффициенты прямых материальных затрат (см. тему 5):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}18 & 0{,}09 \\ 0{,}18 & 0{,}05 & 0{,}35 \\ 0{,}35 & 0{,}18 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

• Найдем коэффициенты полных материальных затрат (см. тему 5):

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}65 & 0{,}37 & 0{,}28 \\ 0{,}57 & 1{,}25 & 0{,}51 \\ 0{,}72 & 0{,}37 & 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

• Найдем объем валовой продукции в планируемом периоде в ячейках H4:H6 (см. тему 5):

$$X = \begin{pmatrix} 219 \\ 272 \\ 289 \end{pmatrix}.$$

2. Количество ресурсов планового периода зависит от плана выпуска валовой продукции, см. формулу (43). Чтобы определить достаточно ли выделено ресурсов, необходимо рассчитать количество ресурсов, требующееся в плановом периоде. Для этого выполним следующее:

• По данным отчетного периода в ячейках B24:D26 найдем матрицу коэффициентов прямых ресурсов по формуле (41). Для нахождения коэффициентов первого столбца матрицы объемы ресурсов каждого вида потребленных первой отраслью разделим на объем валовой продукции первой отрасли. Введем в ячейку B24 формулу

=B8/$F$4,

а затем скопируем ее вниз по столбцу. Коэффициенты остальных столбцов матрицы рассчитываются аналогично. В результате получим следующее:

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}09 & 0{,}22 \\ 0{,}88 & 0{,}07 & 0{,}52 \\ 0{,}47 & 0{,}27 & 0{,}30 \end{pmatrix}.$$

- Рассчитаем необходимое количество ресурсов каждого вида в плановом периоде по формуле (43) в ячейках H8:H10 с помощью функции МУМНОЖ() (см. тему 5). Получим следующее:

$$R^{mp} = \begin{pmatrix} 126 \\ 554 \\ 265 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для производства плановой конечной продукции в объемах $Y_1^n = 80$, $Y_2^n = 120$ и $Y_3^n = 150$ требуется $R_1^{mp} = 126$, $R_2^{mp} = 544$ и $R_3^{mp} = 265$ единиц ресурсов.

Численное решение задачи представлено на рисунке 25.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Yо	Валовая продукция, Xо	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60	170	80	219
5	2	30	10	80	100	220	120	272
6	3	60	40	10	120	230	150	289
7	Ресурсы, Rо						Ресурсы выделенные, Rп	Ресурсы требующиеся, Rт
8	1	30	20	50			120	126
9	2	150	170	120			550	554
10	3	80	60	70			265	265
11								
12		Коэффициенты прямых материальных затрат, А				Единичная матрица, Е		
13		0,29	0,18	0,09		1	0	0
14		0,18	0,05	0,35		0	1	0
15		0,35	0,18	0,04		0	0	1
16								
17								
18		Коэффициенты полных материальных затрат, Р				Е-А		
19		1,65	0,37	0,28		0,71	-0,18	-0,09
20		0,57	1,25	0,51		-0,18	0,95	-0,35
21		0,72	0,37	1,25		-0,35	-0,18	0,96
22								
23		Коэффициенты прямых затрат ресурсов, В						
24		0,18	0,09	0,22				
25		0,88	0,77	0,52				
26		0,47	0,27	0,30				

Рисунок 25 – **Численное решение задачи**

3. Проверим ограничение по ресурсам по формуле (44). На планируемый период были выделены ресурсы в объемах: $R_1^n = 120$, $R_2^n = 550$, $R_3^n = 265$, т. е. для реализации плана конечной продукции в объемах $Y_1^n = 80$, $Y_2^n = 120$ и $Y_3^n = 150$ ресурсов недостаточно. Предложенный план невозможно реализовать.

Уменьшим план конечной продукции. Рассмотрим новый план выпуска конечной продукции, несколько занизив ее первоначальные объемы. Пусть $Y_1^n = 75$, $Y_2^n = 114$ и $Y_3^n = 145$. В ячейках G4:G6 введите новые значения плана конечной продукции. Excel автоматически пересчитает все данные задачи. Сравните новые данные по потребностям в ресурсах $R_1 = 120$, $R_2 = 527$, $R_3 = 252$ с выделенными. Неравенство (44) выполняется, следовательно план выпуска валовой продукции $Y_1^n = 75$, $Y_2^n = 114$ и $Y_3^n = 145$ может быть принят.

Решение задачи в режиме формул приведено на рисунке 26.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60	=СУММ(B4:E4)	80	=МУМНОЖ(B19:D21;G4:G6)
5	2	30	10	80	100	=СУММ(B5:E5)	120	=МУМНОЖ(B19:D21;G4:G6)
6	3	60	40	10	120	=СУММ(B6:E6)	150	=МУМНОЖ(B19:D21;G4:G6)
7	Ресурсы, Ro						Ресурсы выделенные, Rп	Ресурсы требующиеся, Rт
8	1	30	20	50			120	=МУМНОЖ(B24:D26;H4:H6)
9	2	150	170	120			550	=МУМНОЖ(B24:D26;H4:H6)
10	3	80	60	70			265	=МУМНОЖ(B24:D26;H4:H6)
11								
12		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
13		=B4/$F$4	=C4/$F$5	=D4/$F$6		1	0	0
14		=B5/$F$4	=C5/$F$5	=D5/$F$6		0	1	0
15		=B6/$F$4	=C6/$F$5	=D6/$F$6		0	0	1
16								
17								
18		Коэффициенты полных материальных затрат, P				E-A		
19		=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)		=F13-B13	=G13-C13	=H13-D13
20		=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)		=F14-B14	=G14-C14	=H14-D14
21		=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)		=F15-B15	=G15-C15	=H15-D15
22								
23		Коэффициенты прямых затрат ресурсов, B						
24		=B8/$F$4	=C8/$F$5	=D8/$F$6				
25		=B9/$F$4	=C9/$F$5	=D9/$F$6				
26		=B10/$F$4	=C10/$F$5	=D10/$F$6				

Рисунок 26 – **Решение задачи в режиме формул**

6.3. Задача для самостоятельной работы

Пусть имеется n-отраслевое производство, потребляющее m видов ресурсов. Данные по балансу продукции и затратам ресурсов за отчетный период приведены в таблице вариантов (таблица 28).

Задан план выпуска конечной продукции Y^n на следующий период. Под него выделены ресурсы R^n.

1. Определить, достаточно ли выделено ресурсов под план выпуска конечной продукции.

2. В случае недостаточности ресурсов рассчитать возможный план выпуска конечной продукции при выделенных объемах ресурсов.

Таблица 28 – **Варианты для решения задачи**

Вариант 1					
Отчетный период					Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3		
1	50	40	20	60	90
2	30	10	80	100	110
3	60	40	10	120	130
Ресурсы					Ресурсы
1	5	7	4		14
2	2	8	3		11

Вариант 2				
Отчетный период				Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2		
1	15	20	60	70
2	60	25	70	80
Ресурсы				Ресурсы
1	3	4		8
2	5	4		12
3	6	3		14

Вариант 3						
Отчетный период						Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3	4		
1	50	40	30	10	40	45
2	30	10	20	35	50	55
3	60	40	20	15	30	40
4	20	15	45	30	50	55

Продолжение таблицы 28

Отчетный период						Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3	4		
Ресурсы						Ресурсы
1	5	7	2	3		20
2	2	8	5	4		22

Вариант 4

Отчетный период						Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3	4		
1	10	20	15	10	40	45
2	15	25	20	35	50	55
3	30	25	35	15	30	40
4	40	20	33	24	56	60
Ресурсы						Ресурсы
1	5	7	2	3		20
2	2	8	5	4		22
3	3	5	1	4		15

Вариант 5

Отчетный период				Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2		
1	20	15	35	40
2	15	25	30	50
Ресурсы				Ресурсы
1	7	5		17
2	2	6		13

Вариант 6

Отчетный период					Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3		
1	50	40	30	70	80
2	50	25	35	60	65
3	60	40	15	70	80

Окончание таблицы 28

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3		
Ресурсы					Ресурсы
1	5	3	6		15
2	4	5	8		20
3	1	5	9		17
4	3	4	2		12

Вариант 7

Отчетный период						Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3	4		
1	50	40	30	10	70	75
2	35	45	25	35	55	65
3	60	45	25	15	65	70
4	40	20	33	24	56	60
Ресурсы						Ресурсы
1	2	4	6	3		18
2	8	4	1	4		20
3	2	3	5	4		16

Вариант 8

Отчетный период				Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2		
1	20	45	70	80
2	30	20	50	55
Ресурсы				Ресурсы
1	2	5		10
2	3	6		12

Контрольные вопросы

1. Какие виды ресурсов могут быть использованы для выпуска планового объема валовой продукции?
2. Что показывают коэффициенты прямых затрат ресурсов?
3. Как определить объемы ресурсов каждого вида, необходимых для выпуска плановой валовой продукции?

Раздел III. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Тема 7. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

7.1. Основные теоретические сведения

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы специфического вида. В таких системах, с одной стороны, возникают массовые запросы на выполнение каких-либо услуг, с другой – происходит удовлетворение этих запросов.

Система массового обслуживания – это система, предназначенная для обслуживания *потока заявок* (требований) специальными обслуживающими устройствами (каналами). Роль каналов в реальности могут выполнять приборы, операторы, продавцы, линии связи и др.

Каждая заявка поступает в систему *нерегулярно* и в заранее неизвестные, *случайные* моменты времени. Самообслуживание заявок также имеет *непостоянный характер*, происходит в случайные промежутки времени и зависит от многих причин.

Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обуславливает неравномерность загрузки СМО: на входе могут накапливаться необслуженные заявки (перегрузка СМО) либо заявок нет или их меньше, чем свободных каналов (недозагрузка СМО).

Структура СМО показана схематически на рисунке 27.

Согласно рисунку 27 основными элементами СМО являются следующие:

1 – входящий поток требований;
2 – очередь;
3 – каналы обслуживания;
4 – выходящий поток заявок (обслуженные заявки);
5 – необслуженные заявки.

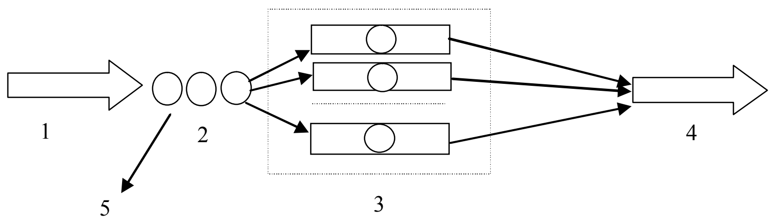


Рисунок 27 – **Структура СМО**

Системы массового обслуживания классифицируются следующим образом:

1) *по числу каналов*:

- одноканальные ($n = 1$);
- многоканальные ($n > 1$);
- многофазные (обслуживание заявки состоит из нескольких этапов, выполняемых последовательно друг за другом на разных обслуживающих устройствах).

2) *по правилам обслуживания*:

- СМО с отказами (нулевое ожидание или явные потери). Если нет свободных каналов, то заявка получает отказ и покидает систему (например, вызов абонента через АТС);
- СМО с ожиданием и неограниченной очередью. При занятости системы заявка поступает в очередь и в конце концов будет выполнена (например, торговля, сфера бытового и медицинского обслуживания);
- СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди (ограниченное ожидание). Имеется ограничение на длину очереди (например, сервис при обслуживании автомобилей, обслуживание в банке).

3) *по дисциплине обслуживания (способу отбора заявок на обслуживание)*:

- системы FIFO (очередь): первым пришел – первым обслужился;
- системы LIFO (стек): последним пришел – первым обслужился;
- системы с приоритетом обслуживания.

4) *по месту нахождения источника требований*:

- разомкнутые, когда источник требований находится вне системы (например, ателье по ремонту телевизоров; здесь источник требований – неисправные телевизоры находятся вне системы и привозятся в ателье для ремонта);
- замкнутые, когда источник требований находится в самой системе (например, неисправные станки цеха завода обслуживаются бригадой наладчиков станков этого же цеха); обслуженные требования через некоторое время вновь поступают в систему (отремонтированные станки снова ломаются и отправляются на обслуживание бригадой наладчиков).

Изучением и исследованием СМО занимается *теория систем массового обслуживания*. Целью данной теории является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок.

7.2. Простейшие системы массового обслуживания

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практическом применении методы решения простейших систем массового обслуживания. *Простейшая система массового обслуживания* – это такая система, процесс функционирования которой является *марковским случайным процессом,* когда вероятность состояния СМО в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от прошлого.

Простейшая СМО имеет следующие характеристики:

1. Входной поток заявок подчиняется закону Пуассона, т. е. вероятность поступления за время t равно k требований и задается формулой

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \tag{45}$$

где t – единица времени (с, мин, ч);
k – количество заявок (требований), поступающих в систему;
λ – интенсивность потока или среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени.

2. Время обслуживания заявки каждым каналом имеет экспоненциальный закон распределения, т. е. вероятность того, что время обслуживания одного требования не превосходит некоторой величины t, определяется по следующей формуле:

$$F(t) = 1 - e^{\mu t}, \tag{46}$$

где μ – интенсивность обслуживания или среднее количество заявок, которое может обслужить канал в единицу времени:

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}}, \tag{47}$$

где $t_{обс}$ – среднее время обслуживания одного требования одним каналом.

Таким образом μ – есть величина, обратная времени обслуживания.

Простейший (пуассоновский) поток заявок обладает тремя основными свойствами:

1. *Ординарности*, т. е. невозможности поступления в систему двух и более заявок одновременно.

2. *Стационарности* – среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени, постоянно. Таким образом, хотя заявки и приходят в случайные моменты времени, в среднем, поток является равномерным и параметр λ характеризует среднее число заявок, поступающих в единицу времени.

3. *Отсутствием последействия,* т. е. количество заявок, уже поступивших в систему, не определяет того, сколько заявок поступит в дальнейшем.

Основной характеристикой простейшей СМО является параметр α (альфа), который показывает, какое среднее число каналов необходимо иметь, чтобы обслужить в единицу времени все поступившие заявки. Параметр α рассчитывается по следующей формуле:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{48}$$

СМО с n каналами будет эффективно работать, если

$$\frac{\alpha}{n} < 1, \tag{49}$$

т. е. $\alpha < n$. Это означает, что фактическое число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для обслуживания заявок.

Для СМО с ожиданием и неограниченной очередью прежде чем рассчитывать показатели эффективности ее работы, нужно выполнить проверку условия (49). Если данное условие не выполняется, то работу СМО сразу следует считать неэффективной, так как система не успевает обслуживать все поступающие заявки, которые накапливаются в бесконечную очередь.

Рассмотрим ряд примеров, в которых выясним, что принять за СМО, как определить вид СМО (по правилам обслуживания и числу каналов).

Пример 1. Вызов абонента, имеющего только один телефонный номер, через АТС.

В данном примере системой массового обслуживания является АТС. Число каналов обслуживания (телефонных линий) равно единице.

Если телефонная линия абонента занята (абонент с кем-то разговаривает), то очередная поступающая заявка получает отказ в обслуживании (гудок «занято»).

Итак, получаем *одноканальную СМО с отказами.*

Пример 2. Инструментальная кладовая с тремя кладовщиками, выдающими рабочим по их требованию одинаковые наборы инструментов во время работы. Если все кладовщики заняты, то рабочий становится в очередь, число мест в которой ограничено.

Здесь кладовую следует принять за СМО, число каналов обслуживания (кладовщиков) равно трем. Если канал занят, то очередное требование становится в очередь, с ограниченным числом мест.

Итак, получаем *многоканальную СМО с ограниченной очередью.*

Пример 3. Работа телефонной справочной службы железнодорожного вокзала.

Здесь мы имеем *многоканальную СМО* (число каналов – число дежурных операторов) *с отказами* (если все каналы заняты – требование получает отказ в обслуживании).

Пример 4. В универсаме к пяти кассирам поступает поток покупателей с интенсивностью 80 человек в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя равна 1 мин.

В данном примере имеем *многоканальную СМО с неограниченной очередью.*

Пример 5. Железнодорожная станция принимает на 5 путей пассажирские поезда и электрички, которые прибывают каждые 15 мин на каждый из них и отбывают после обслуживания также по расписанию через 12 мин.

В данном случае *теория систем массового обслуживания неприменима*, поскольку входной и выходной потоки (приход и уход обслуженных поездов организован по расписанию) не являются случайными.

Таким образом, на основании приведенных примеров мы видим, что вид модели СМО зависит от числа каналов n и от допустимой длины очереди m.

Обобщим информацию и представим ее в виде таблицы 29.

Таблица 29 – **Классификация систем массового обслуживания**

Вид СМО	n	m
Одноканальная с отказами	1	0
Многоканальная с отказами	$n > 1$	0
Одноканальная с ограниченной очередью	1	$1 < m <\infty$
Многоканальная с ограниченной очередью	$n > 1$	$1 < m <\infty$
Одноканальная с неограниченной очередью	1	$m = \infty$
Многоканальная с неограниченной очередью	$n > 1$	$m = \infty$

7.3. Основные показатели эффективности работы системы массового обслуживания

Эффективность работы систем массового обслуживания характеризуют показатели, которые можно разбить на две группы:

1. *Показатели эффективности использования СМО*:

- относительная пропускная способность – вероятность того, что требование будет принято к обслуживанию (Q);
- абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока заявок) – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (A).

Она определяется как произведение относительной пропускной способности и среднего числа заявок, поступивших в систему в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot Q\,. \tag{50}$$

- среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок (K).

2. *Показатели качества обслуживания заявок:*

- вероятность того, что система свободна (P_o);
- вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет (P_n);
- вероятность отказа в обслуживании ($P_{отк}$);
- средняя длина очереди ($L_{оч}$);
- среднее число заявок, находящихся в системе ($L_{сис} = L_{оч} + K$);
- среднее время ожидания заявки в очереди ($T_{оч}$);
- среднее время пребывания заявки в системе ($T_{сис}$).

7.3.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Пусть СМО включает только один канал обслуживания ($n = 1$) и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок (среднее число заявок, которое может обслужить канал в единицу времени) равна μ. Если канал занят, то заявка не обслуживается, т. е. длина очереди $m = 0$.

Формулы для расчета основных характеристик работы данной СМО представлены в таблице 30.

Таблица 30 – **Основные характеристики работы одноканальной СМО с отказами**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \dfrac{1}{1+\alpha}$ или $P_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

Окончание таблицы 30

Название показателя	Формула расчета
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = \alpha P_0 = P_1$ или $P_{отк} = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_1 = P_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda P_0 = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{обсл} = \dfrac{1}{\mu}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = T_{обс} P_0 = \dfrac{1}{\lambda + \mu}$

Пример 1. Телефонная АТС имеет одну линию, на которую в среднем приходит 0,8 вызова в мин. Среднее время разговора 1,5 мин. Вызов, пришедший во время разговора, не обслуживается. Считая потоки вызовов пуассоновскими, найти абсолютную и относительную пропускную способности станции, вероятность отказа в обслуживании, а также среднее время пребывания заявки в системе.

Решение

Телефонную станцию рассматриваем как одноканальную СМО с отказами. За единицу времени примем 1 мин.

Параметры системы следующие:

$$T_{обс} = \frac{1}{\mu} = 1{,}5 \text{ мин;}$$

$$\lambda = 0{,}8 \text{ вызовов/мин;}$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}67 \text{ вызовов/мин.}$$

Рассчитаем относительную пропускную способность следующим образом:

$$Q = P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}67}{0{,}8 + 0{,}67} = 0{,}455,$$

т. е. в среднем обслуживается 45% поступающих в систему заявок.

Абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока заявок) равна:

$$A = \lambda Q = 0{,}8 \cdot 0{,}455 = 0{,}364 \text{ вызовов/мин.}$$

Как видим, $A < \mu$, поскольку при расчете A учитываются еще и те заявки, которым было отказано в обслуживании.

Вероятность отказа в обслуживании рассчитывается следующим образом:

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}8}{0{,}8 + 0{,}67} = 0{,}544\,,$$

т. е. в среднем 54,4% поступивших в систему заявок получают отказ в обслуживании.

Среднее время пребывания заявки в системе вычисляется следующим образом:

$$T_{сис} = \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{0{,}8 + 0{,}67} = 0{,}68 \text{ мин.}$$

7.3.2. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Пусть СМО включает несколько каналов обслуживания ($n > 1$) и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если все каналы заняты, то заявка не обслуживается, т. е. длина очереди $m = 0$.

Формулы для расчета основных характеристик работы данной СМО приведены в таблице 31.

Таблица 31 – **Основные характеристики работы многоканальной СМО с отказами**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}\right]^{-1}$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_n = P_0 \frac{\alpha^n}{n!}$
Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания)	$Q = 1 - P_{отк}$
Абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока требований)	$A = \lambda Q$

Окончание таблицы 31

Название показателя	Формула расчета
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{обс} = \frac{1}{\mu}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = T_{обс} P_0 = Q \frac{1}{\mu}$
Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок	$K = \frac{A}{\mu} = \alpha\, Q$

Пример 2. В отделении банка на обслуживании клиентов работают 3 оператора. Среднее время обслуживания одного клиента оператором – 12 мин. В среднем за час в банк обращаются 15 клиентов. Если все операторы заняты, клиенты не обслуживаются банком. Найти основные характеристики работы банка, а также вероятность того, что не менее двух каналов простаивают.

Решение

Банк можно рассматривать как многоканальную СМО с отказами. За единицу времени примем 1 час.

Параметры системы равны:

$$n = 3;$$

$$T_{обс} = 12 \text{ мин} = 0{,}2 \text{ ч};$$

$$\lambda = 15 \text{ клиентов/ч};$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{0{,}2} = 5 \text{ клиентов/ч}.$$

Рассчитаем параметр α по следующей формуле:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{5} = 3.$$

Вероятность того, что система свободна, определяется по формуле

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}\right]^{-1} = \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6}\right)^{-1} = 0{,}077.$$

Вероятность отказа в обслуживании равна

$$P_{отк} = P_n = P_0 \frac{\alpha^n}{n!} = 0{,}077 \cdot \frac{3^3}{3!} = 0{,}346.$$

Относительная пропускная способность равна

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}346 = 0{,}654.$$

Это означает, что из каждых 100 клиентов, обратившихся в банк, в среднем будут обслужены 65 клиентов. При этом абсолютная пропускная способность СМО составит следующую величину:

$$A = \lambda Q = 15 \cdot 0{,}654 = 9{,}81 \text{ клиентов/ч},$$

таким образом, банк обслуживает не 15 клиентов/ч, а меньше, что вызвано случайностью потока заявок.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок, вычисляется следующим образом:

$$K = \frac{A}{\mu} = \frac{9{,}81}{5} = 1{,}962 \approx 2.$$

Так как число каналов равно 3, а занято 2 канала, то это означает, что простаивает 1 канал.

7.3.3. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди

Пусть СМО включает один канал обслуживания (n = 1) и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой ограничено и равно m ($1 < m < \infty$).

Формулы для расчета основных характеристик работы одноканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди приведены в таблице 32.

Таблица 32 – **Основные характеристики работы одноканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[1 + \alpha + \alpha^2 \cdot \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}\right]^{-1}$

Окончание таблицы 32

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что канал занят, но очереди еще нет	$P_n = P_0\alpha$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{от\ к} = P_{n+m} = P_0\alpha^{1+m}$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = \dfrac{P_0\alpha^2\left(1-\alpha^m\left(m+1-m\alpha\right)\right)}{\left(1-\alpha\right)^2}$

Пример решения задачи не приводится, так как решение аналогично решению примера 3, который приведен в пункте 7.3.4.

7.3.4. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди

Пусть в n-канальную СМО ($n > 1$) поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой ограничено и равно m ($1 < m < \infty$).

Формулы для расчета основных характеристик работымногоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди приведены в таблице 33.

Таблица 33 – **Основные характеристики работы многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!}\cdot\dfrac{1-\left(\alpha/n\right)^m}{n-\alpha}\right]^{-1}$
Вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет	$P_n = P_0\dfrac{\alpha^n}{n!}$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_{n+m} = P_0\dfrac{\alpha^{n+m}}{n^m n!}$
Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания)	$Q = 1 - P_{отк}$
Абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока требований)	$A = \lambda Q$

Окончание таблицы 33

Название показателя	Формула расчета
Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок	$K = \dfrac{A}{\mu} = \alpha\, Q$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = P_0 \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} \cdot \left[1 - \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^m \cdot \left(1 + m - \dfrac{m\alpha}{n}\right)\right]$
Среднее число заявок, находящихся в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \dfrac{L_{сис}}{\lambda}$

Пример 3. В пункте обмена валюты работают два оператора, каждый их которых обслуживает клиента в среднем за 2,5 мин. По условиям безопасности в помещении пункта может находиться одновременно не более 5 человек, включая обслуживаемых клиентов. Если помещение заполнено, то очередной клиент не становится в очередь, а уходит. В среднем клиенты приходят каждые 2 мин. Найти основные характеристики работы обменного пункта.

Решение

Математической моделью данного обменного пункта является двухканальная СМО (n = 2) с ожиданием и ограничением на длину очереди (m = 3). За единицу времени примем 1 мин.

Параметры системы следующие:

$$n = 2;$$

$$m = 3;$$

$$T_{обс} = 2{,}5 \text{ мин};$$

$$\lambda = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ клиентов/мин};$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \text{ клиентов /мин.}$$

Рассчитаем параметр α следующим образом:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}5}{0{,}4} = 1{,}25 .$$

Вероятность того, что система свободна (оба канала свободны) равна

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1-(\alpha/n)^m}{n-\alpha} \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{1{,}25}{1!} + \frac{1{,}25^2}{2!} + \frac{1{,}25^3}{2!} \cdot \frac{1-(1{,}25/2)^3}{2-1{,}25} \right]^{-1} = 0{,}249.$$

Вероятность отказа в обслуживании рассчитывается следующим образом:

$$P_{отк} = P_{n+m} = P_0 \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} = 0{,}249 \cdot \frac{1{,}25^5}{2^3 \cdot 2!} = 0{,}047 \approx 0{,}05\,(5\%).$$

Это означает, что из каждых 100 клиентов, обратившихся в пункт, в среднем будут обслужены около 95 человек.

Относительная пропускная способность рассчитывается следующим образом:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}047 = 0{,}953.$$

Абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda \cdot Q = 0{,}5 \cdot 0{,}953 = 0{,}477 \text{ клиентов/мин},$$

т. е. из обменного пункта в среднем выходят 0,48 клиентов/мин.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок, вычисляется по формуле

$$K = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}477}{0{,}4} = 1{,}191.$$

Средняя длина очереди рассчитывается следующим образом:

$$L_{оч} = P_0 \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\alpha}{n} \right)^m \cdot \left(1 + m - \frac{m\alpha}{n} \right) \right] =$$

$$= 0{,}249 \cdot \frac{1{,}25^3}{1!(2-1{,}25)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1{,}25}{2} \right)^3 \cdot \left(1 + 3 - \frac{3 \cdot 1{,}25}{2} \right) \right] = 0{,}416.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе равно

$$L_{сис} = L_{оч} + K = 0{,}416 + 1{,}191 = 1{,}607.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди равно

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{0{,}416}{0{,}5} = 0{,}83 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda} = \frac{1{,}607}{0{,}5} = 3{,}21 \text{ мин.}$$

7.3.5. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Пусть в одноканальную СМО ($n = 1$) поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой неограничено ($m = \infty$).

Нормальный режим работы такой СМО будет обеспечиваться при условии $\alpha/n < 1$ или $\alpha < n$, т. е. число каналов n должно быть больше среднего числа каналов α. Если это условие нарушается, то очередь заявок будет неограниченно расти и система не справится с их обслуживанием.

Формулы для расчета основных характеристик работы одноканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью приведены в таблице 34.

Таблица 34 – **Основные характеристики работы одноканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью**

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right]^{-1} = 1 - \alpha$
Вероятность того, что канал занят, но очереди еще нет	$P_n = P_1 = P_0\alpha$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_{1+m} = 0$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = \alpha^2/(1-\alpha)$

Окончание таблицы 34

Наименование показателя	Формула расчета
Среднее число заявок, находящихся в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda} = \dfrac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \dfrac{L_{сис}}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda(1-\alpha)}$

Пример решения задачи не приводится, так как решение аналогично решению примера 4, который приведен в пункте 7.3.6.

7.3.6. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Пусть в многоканальную СМО ($n > 1$) поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой неограничено ($m = \infty$).

Прежде чем приступить к расчету основных характеристик такой СМО, необходимо проверить выполнение условия ее работоспособности, т. е. $\alpha < n$. Если это условие нарушается, то очередь заявок будет неограниченно расти, и система не справится с их обслуживанием.

Формулы для расчета основных характеристик работы многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью приведены в таблице 35.

Таблица 35 – **Основные характеристики работы многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью**

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]^{-1}$
Вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет	$P_n = P_0 \dfrac{\alpha^n}{n!}$
Вероятность того, что в очереди находится r требований	$P_{n+r} = P_0 \dfrac{\alpha^{n+r}}{n^r n!}$

Окончание таблицы 35

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = 0$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{отк} = 1$ (таким образом, заявка всегда обслуживается)
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda$ (т. е. выходной поток требований совпадает со входным)
Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок	$K = \dfrac{A}{\mu} = \alpha$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = P_0 \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2}$
Среднее число заявок, находящихся в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \dfrac{L_{сис}}{\lambda}$

Пример 4. В кассе метрополитена, продающей карточки на проезд, работают два окна. В среднем один кассир тратит на обслуживание одного пассажира 0,5 мин. В среднем к кассе подходит 3 человека в мин. Найти основные характеристики работы кассы.

Решение

Касса метрополитена моделируется двухканальной СМО с ожиданием и без ограничения на длину очереди. За единицу времени примем 1 мин.

Параметры системы следующие:

$$n = 2;$$

$$T_{обс} = 0{,}5 \text{ мин};$$

$$\lambda = 3 \text{ чел/мин};$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ чел/мин}.$$

Рассчитаем параметр $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ и проверим выполнение условия $\alpha/n < 1$ (для СМО с неограниченной очередью). Так как данное условие выполняется (1,5 < 2), то мы приступим к расчету основных характеристик СМО:

Вероятность того, что система свободна равна

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{1{,}5}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{2!(2-1{,}5)} \right]^{-1} = 0{,}143.$$

Вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет равна

$$P_n = P_o \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = 0{,}143 \cdot \frac{1{,}5^2}{2!} = 0{,}161.$$

Вероятность отказа в обслуживании равна

$$P_{отк} = 0.$$

Абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda = 3 \text{ чел./мин},$$

таким образом, в среднем из кассы выходят обслуженными 3 человек в мин.

Относительная пропускная способность равна

$$Q = 1 - P_{отк} = 1,$$

т. е. обслуживаются все, обратившиеся в кассу.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок, равно

$$K = \alpha = 1{,}5.$$

Средняя длина очереди равна:

$$L_{оч} = P_0 \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} = 0{,}143 \cdot \frac{1{,}5^3}{(2-1)!(2-1{,}5)^2} = 1{,}931.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе, высчитывается следующим образом:

$$L_{сис} = L_{оч} + K = 1{,}931 + 1{,}5 = 3{,}431.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди равно

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}931}{3} = 0{,}64 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda} = \frac{3{,}431}{3} = 1{,}144 \text{ мин.}$$

Тема 8. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПРИ РЕШЕНИИ МАТРИЧНЫХ ИГР БЕЗ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК

8.1. Основные теоретические сведения

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса (матричная игра решается в чистых стратегиях). Если же платежная матрица не имеет седловой точки, т. е. $\alpha < \beta$, то решением для каждого игрока будет сложная стратегия, состоящая в случайном применении им двух и более чистых стратегий.

Если в процессе игры игрок применяет попеременно несколько чистых стратегий с определенными частотами, то такая стратегия игрока называется ***смешанной***.

Однако, следует отметить, что применение игроками смешанных стратегий имеет смысл только тогда, когда данная игра проводится ими многократно. В случае однократно проводимой игры, не имеющей седловой точки, дать какие-либо содержательные рекомендации игрокам не представляется возможным.

Смешанной стратегией игрока A называется вектор $\overline{p} = (p_1;\ p_2;\ \ldots,\ p_m)$, где p_i – вероятность, с которой игрок A выбирает свою чистую стратегию A_i. Компоненты вектора p удовлетворяют условиям: $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Смешанной стратегией игрока B называют вектор $\overline{q} = (q_1; q_2; \ldots; q_n)$, где q_i – вероятность применения игроком B его чистой стратегии B_j. При этом $q_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$, $\sum_{i=1}^{n} q_j = 1$.

Решить задачу в смешанных стратегиях означает найти такие оптимальные смешанные стратегии $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$, которые доставляют игроку A максимальный средний выигрыш, а игроку B – минимальный средний проигрыш.

Ценой игры γ при решении в смешанных стратегиях называется величина среднего выигрыша игрока A (среднего проигрыша B), приходящегося на одну партию. Стратегии игроков, входящие в их оптимальные смешанные стратегии, называются ***активными***.

Можно показать, что цена игры всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \le \gamma \le \beta .$$

Следовательно, если каждый игрок придерживается своих смешанных стратегий при многократном повторении игры, то он получает более выгодный для себя результат, чем применяя «перестраховочные» стратегии, соответствующие α и β. Каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как ему это невыгодно.

Пусть платежная матрица игры не содержит седловой точки, следовательно, игра решается в смешанных стратегиях.

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны (если это не так, то можно воспользоваться правилом перевода элементов матрицы в область неотрицательных значений. Следовательно, можно принять, что $\gamma > 0$.

Применение игроком A оптимальной смешанной стратегии $\overline{p^*} = (p_1;\, p_2;\, ...;\, p_m)$ гарантирует ему, независимо от поведения игрока B, выигрыш, не меньший цены игры γ.

Если игрок A применяет свою оптимальную стратегию $\overline{p^*}$, а игрок B свою чистую стратегию B_j, то средний выигрыш игрока A будет равен:

$$\gamma_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{ij}p_i + ... + a_{mj}p_m, \quad (j = \overline{1,n}) .$$

Учитывая, что γ_j не может быть меньше γ, можем записать условие:

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{ij}p_i + ... + a_{mj}p_m \ge \gamma, (j = \overline{1,n}) . \qquad (51)$$

Разделив левую и правую части неравенства (51) на цену игры $\gamma > 0$, получим:

$$a_{1j}\frac{p_1}{\gamma} + a_{2j}\frac{p_2}{\gamma} + ... + a_{ij}\frac{p_i}{\gamma} + ... + a_{mj}\frac{p_m}{\gamma} \ge 1, (j = \overline{1,n}) . \qquad (52)$$

Введем новые обозначения:

$$\frac{p_i}{\gamma} = x_i, (i = \overline{1,m}). \tag{53}$$

Тогда неравенства (52) запишутся в виде:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{ij}x_i + \ldots + a_{mj}x_m \geq 1, (j = \overline{1,n}), \tag{54}$$

где $x_i \geq 0$, так как $p_i \geq 0$, $\gamma > 0$.

Компоненты вектора p удовлетворяют следующему условию:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Учитывая соотношение (53) получим, что переменные x_i удовлетворяют условию:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\gamma}.$$

Учитывая, что игрок A стремится максимизировать γ, получаем линейную функцию

$$F = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min. \tag{55}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных x_i ($i = \overline{1,m}$), минимизирующие линейную функцию (55) и удовлетворяющие ограничениям (54):

$$F = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 1, (j = \overline{1,n}); \\ x_i \geq 0, (i = \overline{1,m}). \end{cases}$$

Решив данную задачу, найдем цену игры $\gamma = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}$ и вероятность применения игроком A его чистых стратегий $p_i = \dfrac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}$ $(i = \overline{1,m})$.

Аналогично для игрока B нужно решить двойственную задачу:

$$F_Д = \sum_{j=1}^{n} z_j \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le 1, (i = \overline{1,m}); \\ z_j \ge 0, (j = \overline{1,n}). \end{cases}$$

Решив двойственную задачу, найдем вероятности применения игроком B его чистых стратегий из выражения:

$$q_j = \frac{z_j}{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \frac{z_j}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, (j = \overline{1,n}).$$

8.2. Пример решения задачи

Решить игру, представленную платежной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Прежде всего проверим, имеет ли игра седловую точку. Для каждой стратегии игрока A найдем наименьший выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ $(i = \overline{1,5})$ и запишем в соответствующий столбец:

	B_1	B_2	B3	α_i
A_1	3	1	5	1
A_2	1	5	0	0
A3	4	–2	2	–2
β_j	4	5	5	

Аналогично для каждой стратегии игрока B максимальный проигрыш $\beta_j = \max_i a_{ij}, (j = \overline{1,4})$. Нижняя цена игры (максимин):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{1, 0, -2\} = 1 .$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{4, 5, 5\} = 4 .$$

Максиминная (перестраховочная) стратегия игрока A есть стратегия A_1. Применяя эту стратегию игрок A получит выигрыш не менее 1. Минимаксная (перестраховочная) стратегия игрока B есть стратегия B_1. Применяя эту стратегию, он проиграет не больше 4.

Так как $\alpha \neq \beta$, будем решать игру в смешанных стратегиях. Цена игры при этом удовлетворяет условию $1 \leq \gamma \leq 4$.

Анализируя эту матрицу, делаем вывод, что дальнейшему упрощению она не подлежит.

Для решения игры путем сведения к задаче линейного программирования, переведем элементы матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

в область целых неотрицательных значений. Для этого прибавим к каждому элементу матрицы число 2 и получим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Составим задачу линейного программирования для игрока A:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min ,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 1; \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 1; \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1; \\ x_i \geq 0, \ (i = \overline{1,3}). \end{cases} \tag{56}$$

Для игрока B имеем двойственную задачу:

$$F_Д = z_1 + z_2 + z_3 \to \max ,$$

$$\begin{cases} 5z_1 + 3z_2 + 7z_3 \le 1; \\ 3z_1 + 7z_2 + 2z_3 \le 1; \\ 6z_1 + 4z_3 \le 1; \\ z_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}). \end{cases} \tag{57}$$

Для решения задачи (56) воспользуемся надстройкой Excel *Поиск решения*. Подготовьте исходные данные на листе Excel как показано на рисунке 28.

	A	B	C	D	E	F
1	Платежная матрица					
2	5	3	7		x1	0
3	3	7	2		x2	0
4	6	0	4		x3	0
5	Левые части ограничений					
6	=СУММПР	=СУММПР	=СУММПР		Цель	=СУММ(F2:F4)

Рисунок 28 – **Исходные данные для решения матричной игры**

Ячейки F2:F4 отведены под значения переменных x_i. В них введены начальные приближения, равные нулю. В ячейке F6 находится формула целевой функции (сумма переменных). В ячейках A6:C6 – формулы левых частей ограничений:

- A6: =СУММПРОИЗВ(A2:A4;$F$2:$F$4);
- B6: =СУММПРОИЗВ(B2:B4;$F$2:$F$4);
- C6: =СУММПРОИЗВ(C2:C4;$F$2:$F$4).

Формулу ячейки A6 в ячейки B6:C6 можно скопировать методом автозаполнения.

Вызовем надстройку *Поиск решения* и заполним диалоговое окно как показано на рисунке 29 (необходимо также установить флажок *Линейная модель*, нажав кнопку *Параметры*).

Нажмем кнопку *Выполнить*, получим сообщение об успешном решении задачи и выберем в списке *Тип отчета* пункт *Устойчивость*. Переключатель должен быть установлен в положение *Сохранить найденное решение*. После нажатия кнопки *OK* Excel сформирует отдельный лист рабочей книги, содержащий отчет по устойчивости. Отчет по устойчивости требуется для того, чтобы не решать заново двойственную задачу: оптимальные значения двойственных переменных z_j^* приведены в графе *Теневая цена* этого отчета. Скопируем ячейки, содержащие значение теневой цены, на лист с исходными данными задачи в ячейки B8:B10 (рисунок 30).

Найдем вероятности применения игроком *A* чистых стратегий по формуле

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

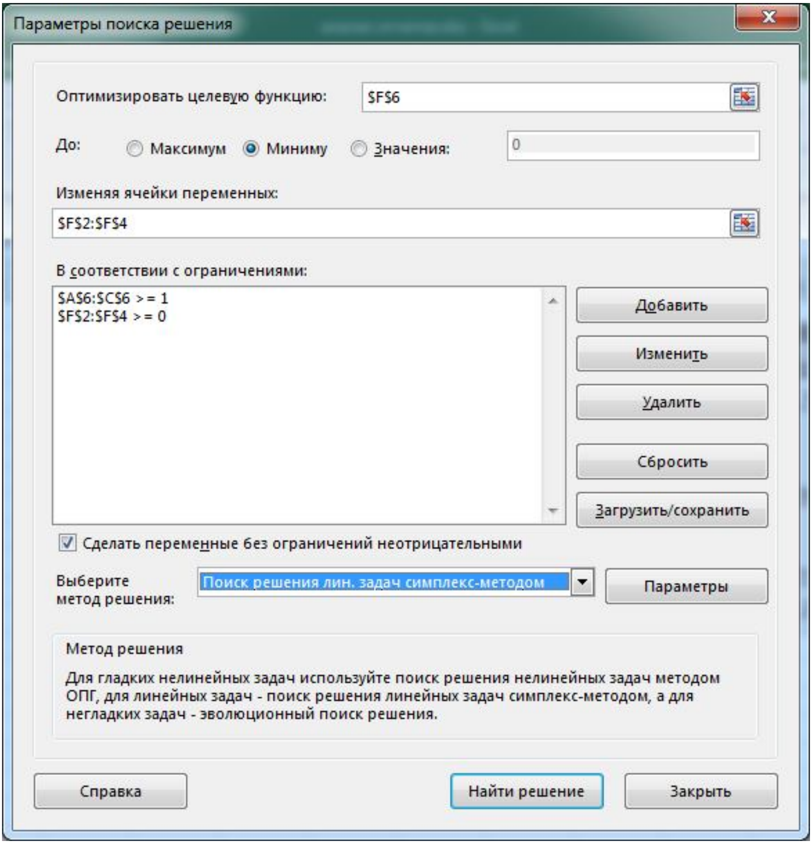


Рисунок 29 – **Окно *Поиск решения* для решения матричной игры**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Платежная матрица							
2	5	3	7		x1	0,15385	p1	0,66667
3	3	7	2		x2	0,07692	p2	0,33333
4	6	0	4		x3	0	p3	0
5	Левые части ограничений							
6	1	1	1,23077		Цель	0,23077		
7								
8	z1	0,15385	q1	0,66667	Цена игры	2,33333		
9	z2	0,07692	q2	0,33333				
10	z3	0	q3	0				

Рисунок 30 – **Результаты решения игры**

Для этого в ячейке H2 запишем формулу для нахождения p_1:

= F2/$F$6.

Вероятности p_2 и p_3 находятся аналогично, поэтому скопируем формулу из ячейки H2 в ячейки H3 и H4 с помощью автозаполнения.

Итак, $p_1 = \dfrac{0{,}154}{0{,}231} = 0{,}667$, $p_2 = \dfrac{0{,}077}{0{,}231} = 0{,}333$, $p_3 = \dfrac{0}{0{,}231} = 0$.

Вероятности применения игроком *B* чистых стратегий *Bj* находим по формуле

$$q_j = \frac{z_j}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Для этого в ячейку D8 запишем формулу для нахождения q_1:

= B8/$F$6.

Вероятности q_2 и q_3 находятся аналогично, поэтому скопируем формулу из ячейки D8 в ячейки D9 и D10 с помощью маркера автозаполнения.

Итак, $q_1 = \dfrac{0{,}154}{0{,}231} = 0{,}667$; $q_2 = \dfrac{0{,}077}{0{,}231} = 0{,}333$; $q_3 = \dfrac{0}{0{,}231} = 0$.

Цену игры найдем по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Однако это будет цена игры для преобразованной матрицы. Чтобы вернуться к исходной задаче, нужно вычесть 2 из γ (так как ранее мы прибавляли двойку ко всем элементам платежной матрицы, а это увеличивает цену игры на 2). Итак, в ячейку F8 запишем формулу

=1/F6–2.

Получим, что цена игры равна 2,33. Учитывая, что для данной задачи $\alpha = 1$, а $\beta = 4$, убеждаемся, что условие $\alpha \le \gamma \le \beta$ выполнено.

Окончательно возвращаясь к исходной задаче, необходимо вспомнить, какие стратегии игроков *A* и *B* мы посчитали заведомо невыгодными и вычеркнули из платежной матрицы. Этим стратегиям, очевидно, соответствуют вероятности, равные нулю. Итак, для исходной платежной матрицы имеем следующие смешанные стратегии:

- игрока *A*: $\overline{p^*} = (0{,}667; 0{,}333; 0; 0; 0)$;
- игрока *B*: $\overline{q^*} = (0{,}667; 0{,}333; 0; 0)$.

Полученные результаты можно сформулировать так: в случае многократного повторения игры игроку *A* для получения максимально возможного среднего выигрыша, равного 2,33, следует в приблизительно 67% случаев применять первую стратегию, и в 33% случаев – вторую. Например, если игра повторяется 100 раз, то 67 раз он должен применить первую стратегию и 33 раза – вторую. Остальные стратегии игроку *A* применять невыгодно.

Что касается игрока *B*, то он должен также применять свои первую и вторую стратегии в 67% случаев и 33% случаев соответственно. При этом его средний проигрыш будет 2,33, что значительно меньше верхней цены игры $\beta = 4$.

8.3. Задания для самостоятельной работы

Решить матричную игру, заданную платежной матрицей, сведя ее к паре двойственных задач линейного программирования. Предварительно произвести возможные упрощения платежной матрицы.

Вариант 1.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}17$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0{,}83$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0{,}83$, $q_5 = 0{,}17$, цена игры = 1,83.

Вариант 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}67$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0{,}33$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0{,}5$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0{,}5$, $q_4 = 0$, $q_5 = 0$, цена игры = 1.

Вариант 3.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & -6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}67$, $p_3 = 0{,}33$, $p_4 = 0$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0{,}67$, $q_4 = 0{,}33$, $q_5 = 0$, цена игры = 2,67.

Вариант 4.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0{,}71$, $p_4 = 0{,}29$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0{,}14$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0{,}86$, $q_5 = 0$, цена игры = 3,29.

Вариант 5.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}43$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0$, $p_5 = 0{,}07$, $q_1 = 0{,}14$, $q_2 = 0{,}29$, $q_3 = 0{,}57$, $q_4 = 0$, $q_5 = 0$, цена игры = 2,43.

Вариант 6.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0{,}14$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0{,}86$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0{,}57$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0{,}43$, $q_4 = 0$, цена игры = 1,43.

Вариант 7.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}29$, $p_3 = 0$, $p_3 = 0{,}71$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0{,}14$, $q_2 = 0{,}86$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0$, цена игры = 1,29.

Вариант 8.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}67$, $p_3 = 0{,}33$, $p_4 = 0$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0{,}67$, $q_2 = 0{,}33$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0$, цена игры = 2,33.

Контрольные вопросы

1. Что такое игра? Какие бывают виды игр?
2. Поясните понятия «чистая стратегия», «исход игры», «платежная матрица». Что значит решить матричную игру?
3. Принцип минимакса. Нижняя и верхняя цена игры.
4. Когда существует решение игры в чистых стратегиях? Что такое седловая точка матричной игры?
5. Как можно упростить платежную матрицу игры? Какие стратегии называются заведомо невыгодными?
6. Что такое смешанные стратегии игроков? Что означает решить матричную игру в смешанных стратегиях?
7. Что такое цена игры в случае решения задачи в чистых стратегиях? А в случае решения в смешанных стратегиях?
8. Поясните смысл неравенства $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.
9. К решению каких задач линейного программирования сводится решение матричной игры?
10. Поясните, почему целевая функция задачи линейного программирования для игрока *A* должна быть минимизирована.
11. Какой должна быть платежная матрица игры, чтобы ее можно было свести к задаче линейного программирования?

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

**Пособие
для реализации содержания образовательных
программ высшего образования I ступени
и переподготовки руководящих
работников и специалистов**

В трех частях

Часть 2

Авторы-составители:
Авдашкова Людмила Павловна
Грибовская Марал Атаевна
Еськова Оксана Ивановна
Заяц Татьяна Александровна

Редактор Т. В. Гавриленко
Компьютерная верстка Л. Ф. Барановская

Подписано в печать 07.05.21. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 6,01. Уч.-изд. л. 5,87. Тираж 100 экз.
Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/138 от 08.01.2014.
Просп. Октября, 50, 246029, Гомель.
http://www.i-bteu.by